

# 核辐射物理及探测学

## CH1 原子核的基本性质

### 原子核的组成、质量及半径

- 三个不确定度关系

$$\begin{aligned} \text{i. } \delta x \cdot \delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \text{ii. } \delta E \cdot \delta t &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \text{iii. } \delta l_z \cdot \delta \Phi &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

第三条：假设物体绕Z轴公转，其相对xoy平面的倾斜角度为 $\Phi$ ，则物体在Z轴方向的角动量分量和倾斜角度之间有不确定度关系

e.g. 证明原子核内不太可能存在电子(质子-电子假说的失败)

思路：假设原子直径为d，由位置与动量不确定度关系的推论，电子的波函数的波长最大值应满足 $\frac{\lambda}{2} = d$ ，由德布罗意关系得到动量的最小值，由相对论相关理论，结合电子静质量，可以计算得到原子内电子的动能理论最小值，远高于实际实验中测得的电子能量

- 原子的表示要素:元素符号X，核子数(质量数)A，质子数Z，中子数N，同质异能态标识m(在A后面标注)，通常表示为

$${}_{Z}^{A+m} X_N$$

- i. Z与X一一对应，因此Z可以省略
- ii. A=Z+N，因此N可以省略
- iii. 原子通常处于基态，因此m可以省略
- iv. 省略后由 ${}^A X$ 表示一个原子
- 核素：具有一定数目的中子和质子以及特定能态的一种原子或原子核称为核素，需要三个要素来决定一个核素
- 同位素：原子序数Z相同但质量数A不同的核素称为某元素的同位素
- 同位素丰度：元素中各同位素天然含量的**原子数百分比**(注意不是质量数)
- 同中异核素：中子数N相同，质子数Z不同的核素
- 同量异位素：质量数A相同，质子数Z不同的核素
- 同质异能素：质子数Z和中子数N均相同，而能态不同的核素
- 同质异能态：指同质异能素所处的能态，是寿命较长的激发态
- 偶A核
- 奇A核
- 镜像核：N与Z互换的两个核素
- 质子数为Z核子数为A的原子核质量用m(Z,A)表示，相应的原子质量为M(Z,A)

$$M(Z, A) = m(Z, A) + Z \cdot m_0 - \frac{\sum_{i=1}^Z B_{e,i}}{c^2}$$

原子核的质量不便直接测量，实际中通常测量原(离)子的质量，并使用原子质量参与计算

- A是原子质量以u为单位时的取正值，实际质量M与A之间的差值为质量过剩 $\Delta$ ，以u为单位，数值可正可负

$$M = A + \Delta$$

- 1u是1个 ${}^{12}C$ 原子的质量的1/12

国际标准曾经以O-16来标识原子量，之后采取C-12的原因有

1.O-16有三种同位素，作为标准有误差，C-12的丰度足够大且稳定

2.曾经流行以质谱法测量原子量，碳元素可以形成很多用于测量的大分子有机物，作为标准十分可靠

- 通过电磁作用力测量得到的原子核大小由电荷半径标定；通过强相互作用力(核力)测量得到的原子核大小由核力半径标定

- 利用电磁相互作用力，通过电子散射测量电荷半径：利用高能电子的散射，测量散射角计算电荷半径，如下：

$$\theta = \sin^{-1}(1.22 \frac{\lambda}{D})$$

此处高能电子的能量处于100MeV~1GeV之间，这是为了使得 $\lambda$ 和 $D$ 同数量级，衍射效果好

- 利用核力，通过卢瑟福散射规律测量核力半径

- 测量得到，电荷半径与核力半径几乎一样(差距不超过0.1fm)，半径与质量数的1/3次方近似成正比

$$R = r_0 A^{1/3}$$

进一步的，体积 $V$ 与 $A$ 近似正比，因此核子的密度 $A/V$ 几乎不变，得到结论规律：**核力具有“饱和性”**，暗示了核力是一个短程力，任何一个核子只能给它周围有限的核子施加核力的影响(而不是像长程力例如重力，由于挤压，大雪球的密度会高于小雪球)

## 原子核稳定性的实验规律

- 在Z-N图中，只有处于 $\beta$ 稳定曲线的核素，才有可能是稳定的，核越重， $\beta$ 稳定曲线越向中子轴N偏转。丰质子核素主要通过EC(electron capture)或 $\beta^+$ 衰变的方式趋于稳定；丰中子核素主要通过 $\beta^-$ 衰变的方式趋于稳定
- 根据Z、N的奇偶性分类，偶偶核最稳定，其次是奇偶核和偶奇核，奇奇核最不稳定
- 由壳层模型，当质子，中子数目取幻数时，原子核特别稳定
  - Z=2,8,20,28,50,82
  - N=2,8,20,28,50,82,126
- $\beta$ 稳定曲线只适用于低Z区，在83号元素以后，就没有稳定核素了。因为由于Z的增大，导致了库伦排斥能的增大，使得原子核不稳定，在高Z区，主要发生 $\alpha$ 衰变
- 在Z-N图中添加一个质量过剩( $\Delta$ )轴，则 $\beta$ 稳定曲线上恰是 $\Delta$ 的最小值集合(类似山沟)

## 原子核的结合能

- 从原子核边缘向核中心，层次越深，结合能越大

- 原子核质量不等于质子质量加中子质量。组成某一原子核的所有核子质量之和与该原子核质量之差，称为原子核的质量亏损

$$\Delta m(Z, A) = (A - Z)m_n + Zm_p - m(Z, A)$$

实际计算中常用 $\Delta M(Z, A)$

$$\Delta M(Z, A) = (A - Z)m_n + ZM(^1H) - M(Z, A)$$

- $\Delta m(Z, A)$ 和 $\Delta M(Z, A)$ 之间的差距是：后者相比前者考虑了电子的质量差，包括电子静质量差(为0,完全抵消)和电子结合能差( $Z$ 个氢原子的电子结合能减去 $Z$ 个电子的结合能，不完全抵消)。但一般可以忽略电子结合能差，有

$$\Delta m(Z, A) \approx \Delta M(Z, A)$$

- 体系变化前后的静止质量差，称为广义质量亏损

$$\Delta M = \sum M_i - \sum M_f$$

$$\Delta E = \sum E_f - \sum E_i$$

故有

$$\Delta E = \Delta M c^2$$

- 结合能：由自由核子组成原子核时所释放出的能量

$$B(Z, A) = \Delta m(Z, A)c^2$$

由质量亏损和广义质量亏损的近似关系，可以推得

$$B(Z, A) = (Z\Delta(1, 1) + (A - Z)\Delta(0, 1) - \Delta(Z, A))c^2$$

- 比结合能：原子核中每个原子的平均结合能，称为比结合能  $\epsilon = \frac{B(Z, A)}{A}$ 。它表示把原子核拆成自由粒子时，平均每个核子所做的功
- 自然界中任意原子核的比结合能约为  $7 - 8 MeV$
- 分离能：一个自由核子与原子核的其余部分组成原子核时所释放出的能量，对于某种核素  ${}^A_Z X$ ，根据最后一个核子的种类，有以下区分

- 当最后一个核子为质子时

$$\begin{aligned} S_p(Z, A) &= (M({}^1 H) + M(Z - 1, A - 1) - M(Z, A))c^2 \\ &= (\Delta(Z - 1, A - 1) + \Delta(1, 1) - \Delta(Z, A))c^2 \\ &= (\Delta(Z - 1, A - 1) + Z\Delta(1, 1) - (Z - 1)\Delta(1, 1) + (A - Z)\Delta(0, 1) - (A - Z)\Delta(0, 1) - \Delta(Z, A))c^2 \\ &= B(Z, A) - B(Z - 1, A - 1) \end{aligned}$$

- 当最后一个核子为中子时

$$\begin{aligned} S_n(Z, A) &= (M(0, 1) + M(Z, A - 1) - M(Z, A))c^2 \\ &= (\Delta(0, 1) + \Delta(Z, A - 1) - \Delta(Z, A))c^2 \\ &= (Z\Delta(1, 1) + (A - Z)\Delta(0, 1) - (A - Z - 1)\Delta(0, 1) - Z\Delta(1, 1) + \Delta(Z, A - 1) - \Delta(Z, A))c^2 \\ &= B(Z, A) - B(Z, A - 1) \end{aligned}$$

## 液滴模型

- 类比：饱和性(比结合能几乎是常数)和不可压缩性(密度不变)
- 结合能的组成
  - 核力是短程力，核力所做功的大小为  $a_V$ ，全部核子通过核力所做功之和为体积能  $B_V$ ，是原子核结合能的主要构成项，正比于核子数： $B_V = a_V \cdot A$
  - 处于表面的核子受到的核力较弱，故需要扣除表面能，与原子核的表面积  $S$  成正比： $B_S = -a_S \cdot A^{2/3}$
  - 核内质子间存在库仑排斥作用，使结合能变小。由于库仑力是长程力，任意两个质子之间都会有库仑作用力，因此库仑能正比于  $Z(Z - 1)$ ，且势能与距离的负一次方成正比，有： $B_C = -a_C \cdot Z^2 A^{-1/3}$
  - 结合能的公式为

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3}$$

- 模型缺陷
  - 该公式可推得，在  $A$  一定时， $Z=0$  的核最稳定，与实际情况不符
  - 无法解释幻数的存在
- 修正：对称能和反对能
  - 对称能：稳定轻核内的中子和质子有对称相处的趋势，即  $N = Z$ 。当二者不等时，对称能降低，核不稳定。形式为

$$B_{sym} = -a_{sym} \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1}$$

- 反对能：核内中子和质子有各自成对相处的趋势，反对能的形式为

$$B_p = \delta a_p A^{-1/2}$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{偶偶核} \\ 0, & \text{奇}A\text{核} \\ -1, & \text{奇奇核} \end{cases}$$

- 球形核的结合能半经验公式

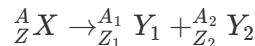
$$\begin{aligned} B &= B_V + B_S + B_C + B_{sym} + B_p \\ &= a_V A - a_S A^{2/3} - \frac{a_C Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(\frac{A}{2} - Z)^2}{A} + \frac{\delta a_p}{A^{1/2}} \end{aligned}$$

$a_V$	$a_S$	$a_C$	$a_{sym}$	$a_p$
15.835MeV	18.33MeV	0.714MeV	92.8MeV	11.2MeV

- 核聚变主要与表面能有关；核裂变主要与库仑能有关

## 核力及核势垒

- 核力的一般性质
  - i. 核力是强相互作用力
  - ii. 核力是短程力
  - iii. 核力具有饱和性
  - iv. 核力与电荷无关，不同核子之间的核力基本相同
  - v. 核力主要是吸引力，但是在极短程内有排斥芯
  - vi. 核力与自旋有关
  - vii. 核力有非中心力成分：力的大小与相对方位有关系
  - viii. 自旋与轨道角动量的相互关系也影响核力
- 势垒：电磁力与核力的势能曲线的叠加导致了势垒的存在，也即突破距离最近时的库仑势能
- 库仑势垒的最高点在距离取两核半径之和时取到
- 对于衰变方程



库仑势垒的高度为

$$V(R) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{Z_1 Z_2}{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})}$$

==e.g.==碳循环和质子质子循环两个反应，哪一个更容易发生？

- 中子不带电，所以没有库仑势垒

与带正电的粒子相比，即使是能量很低的中子，也能进入原子核，但是同时会获得MeV数量级的能量，导致振幅的不确定度降到10fm量级。因此能不等于容易，波的特性限制了中子进入原子核

## 原子核的矩

- 原子核自旋的整/半整特性由A决定。因为原子核的自旋数J由每个核子的自旋S和轨道角动量L的矢量叠加而成，且J在Z轴的投影值才是整数或半整数倍的 $\hbar$ 。核自旋：

$$J = \sqrt{I(I+1)}\hbar$$

$$I = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots \text{ even } A \\ 1/2, 3/2, 5/2, \dots \text{ odd } A \end{cases}$$

$$J_z = m_I \hbar, m_I \in Z, \in [-I, I]$$

共有 $2J + 1$ 种取值，一般取 $m_I$ 的最大值作为核的自旋

- 做圆周运动的单个带电粒子的磁矩和角动量满足

$$\mu = \frac{q}{2m} L$$

- 电子的磁矩

- 电子的轨道角动量对应的磁矩为

$$\mu_{e,l} = -\frac{e}{2m_e} L = g_{e,l} \frac{e}{2m_e} L = g_{e,l} \mu_B \sqrt{I(I+1)}$$

其中 $g_{e,l} = -1$ ，为回旋磁比率或郎德因子，或 $g$ 因子；玻尔磁子 $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$

- 电子的自旋对应的磁矩为

$$\mu_{e,s} = g_{e,s} \mu_B S$$

其中 $g_{e,s} = -2$

- 考虑电子的轨道角动量和自旋后，磁矩为

$$\vec{\mu}_e = (g_{e,l} \vec{L} + g_{e,s} \vec{S}) \mu_B$$

- 核子的磁矩

- 质子自旋 $\mu_{p,s} = g_{p,s} \mu_N S$ ；中子自旋 $\mu_{n,s} = g_{n,s} \mu_N S$ 。其中 $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ 为核的玻尔磁子，或核磁子。 $g_{p,s}$ 、 $g_{n,s}$ 分别为质子和中子的郎德因子
- 类比电子，根据核子电性，质子和中子的郎德因子应该是 $+2, 0$ ，但事实上二者的反常磁矩 $\mu_{p,s} = 2.1728456 \mu_N$ 、 $\mu_{n,s} = -1.9130428 \mu_N$
- 核子的反常磁矩说明中子和质子内部还有更复杂的结构，不是点粒子。但是电子似可认为如此，直到 $10^{-17} cm$ 还没有发现其存在结构

- 考虑中子和质子的自旋磁矩，以及质子的轨道磁矩，它们的矢量和即为原子核的磁矩

$$\vec{\mu}_I = \left( \sum_{i=1}^Z [g_{p,l} \vec{l}_i + g_{p,s} \vec{s}_i] + \sum_{i=1}^N g_{n,s} \vec{s}_i \right) \cdot \mu_N$$

通常情况下，难以利用上式求解磁矩。在核磁共振中，可以通过施加磁场，再施加射频脉冲进行横向磁化，撤去共振脉冲，使得质子回归到之前的能态，测量能量弛豫的发射光子数，根据弛豫时间不同以分别不同组织的图像。可以由Larmor frequency:

$$\omega_L = \frac{\mu_B}{I_i \hbar}$$

- 一般情况下，例如氘核的实测磁矩不等于质子和中子的自旋磁矩之和，因为质子的轨道运动使得原子核的电荷分布在S波( $I=0$ )的基础上，增加了D波( $I=2\hbar$ )，这导致了原子核的形状偏离球形，由此产生了电四极矩
- 假设原子核是偏离球形不多的轴对称椭球，一个半轴与Z轴重合，电荷均匀分布，计算它在 $(0, 0, z_0)$ 点产生的电势，将距离的负一次方项用勒让德多项式展开，可以依次定义每一项为原子核的单电荷电势、偶极电势、四极电势、八级电势以及 $2^n$ 极电势。形式上，对于 $2^n$ 极电势，它的形式为

$$\phi_n = \frac{1}{z_0^{n+1}} \int_V r^n \cdot P_n(\cos \theta) d\tau$$

- 由于勒让德多项式的角标奇数项( $P_1, P_3, \dots$ )是奇函数，且椭球是一个中心对称构型，因此 $2^{2k-1}$ 极电势均为零，例如偶极、八极电势均为0

- 单电荷电势

$$\phi_0 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z_0} \int_V d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{Ze}{z_0} > 0$$

- 四极子电势

$$\phi_2 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2z_0^3} \int_V (3z^2 - r^2) d\tau = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{eQ}{2z_0^3}$$

- 电四极矩与形变参量

- 定义上式中的Q是核的电四极矩

$$Q = \frac{1}{e} \int_V \rho(3z^2 - r^2) d\tau$$

设电荷密度是均匀的，椭球的Z轴方向的半轴为c，垂直于Z轴的两半轴均为a，则Q可化简为

$$Q = \frac{Z}{V} \int_V (2z^2 - x^2 - y^2) d\tau = \frac{2}{5} Z(c^2 - a^2)$$

- 定义形变参量  $\epsilon = \frac{\Delta R}{R}$ ，R是假想的球半径， $\Delta R$ 描述的是椭球长半轴超出均匀半径的距离，满足 $\Delta R = c - R$ 。进一步用 $\epsilon$ 和R表示半轴a，可以化简得到

$$Q = \frac{6}{5} Z r_0^2 A^{\frac{2}{3}} \epsilon$$

因此在实验测得电四极矩后，可以算得形变参量

- 核的电四极矩Q有正有负，多数核满足 $Q > 0, \epsilon > 0$ ，即多数核为长椭球形
- 多数原子核的形变参量不等于零，一般在0.01量级，说明大多数核的形状是非球形的，但偏离球形的程度不大
- 当 $Z = 28, 50, 82$ 时， $Q = 0$
- 自旋为0和1/2的原子核，Q=0
- 原子核是带电体系，单极势是最主要的构成
  - 球形原子核只有单极势
  - 因为原子核是对称的，所以 $2^{2k-1}$ 极势总是0
  - 非球形原子核有四极势，其正负取决于原子核是长椭球还是扁椭球

## 原子核的统计性质

- 与经典粒子体系不同，在量子力学中，无法任意精确地辨识每个粒子，同类微观粒子间无法区分(具有全同性)只能用统计的方法来描述多个全同粒子组成的体系，例如用波函数的模平方反映粒子出现的概率密度
- 由同类微观粒子组成的多粒子体系，可以用一波函数来描述

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

其中 $x_i$ 表示第i个粒子的状态

- 定义算符 $P_{ij}$ 表示将体系中的第i个粒子和第j个粒子交换，即

$$\begin{aligned} P_{ij} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) &= \Psi(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= \lambda \Psi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{aligned}$$

对于全同粒子(具有完全相同的内禀属性的一类粒子)，交换前后波函数的几率分布没有变，因此将算符两次作用在波函数上产生的本征值因子均为 $\lambda$ ，即有

$$\lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$$

全同粒子体系的波函数经过粒子交换后，只有两种可能性

- 波函数反对称：费米子
- 波函数对称：玻色子
- 费米子与玻色子
  - 自旋为半整数  $\frac{1}{2}$  的粒子被称为费米子。由费米子组成的全同粒子体系，服从费米-狄拉克统计，波函数交换反对称。例如电子、质子、中子、中微子、 $\mu$  子、奇A核
  - 自旋为整数  $\frac{1}{2}$  的粒子被称为玻色子。由玻色子组成的全同粒子体系，服从玻色-爱因斯坦统计，波函数交换对称。例如光子、 $\pi$  介子、偶A核
- 核子都是费米子，原子核由数目不等的费米子组成。实验结果显示：奇A核是费米子，偶A核是玻色子，有结论
  - 由奇数个费米子组成的粒子仍然是费米子
  - 由偶数个费米子组成的粒子是玻色子
  - 由任意个玻色子组成的粒子总是玻色子

证明原子核的统计性质由A决定：由于波函数交换对称性质可以显示全同粒子属性，考虑两个核子数为A的相同原子核构成的体系，其波函数为

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_A, x_{A+1}, x_{A+2}, \dots, x_{2A})$$

将前后A对核子逐对交换，由于核子是费米子，其交换反对称，因此得到因子为  $(-1)^A$ 。当A为偶数时，该体系交换对称，故原子核为玻色子

## 原子核的宇称

- 狭义的宇称指的是波函数的奇偶对称性
- 宇称算符与奇偶宇称态：空间反演算符作用在本征态上，有

$$P\psi(r) = \psi(-r)$$

$$P^2\psi(r) = P\psi(-r) = \psi(r)$$

因此反演算符的本征值  $\pi$  满足

$$\pi^2 = 1$$

分为两种情况

- 若本征值为 +1，则称本征态为偶宇称态，满足  $\psi(r) = \psi(-r)$
- 若本征值为 -1，则称本征态为奇宇称态，满足  $\psi(r) = -\psi(-r)$
- 宇称是否守恒讨论的是算符作用后波函数的对称性是否改变
  - 宇称守恒：反应前后波函数的对称性不变，奇函数仍然是奇函数，偶函数仍然是偶函数
  - 宇称不守恒：奇偶对称性不再恒定，波函数初态与末态的对称关系不确定
  - 此外，有的波函数没有确定的宇称，它们不是空间反演算符的本征波函数
- 空间反演不变性：在空间反演条件下，将所有的实验条件都取镜像，镜像过程将和实际过程一样，遵守相同的物理规律
- 以 Schrödinger 方程为例，要求在空间反演下 ( $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ) 物理规律不变，可以得到  $H(r) = H(-r)$ ，即势函数是对称的。进一步可以得到  $[P, H] = 0$ ，因此宇称量子数  $\pi$  是好量子数，是不随时间改变的守恒量
- 在球坐标系中对波函数  $\psi(r, \theta, \phi)$  进行空间反演，得到因子等于  $(-1)^l$ ，这说明 **核子轨道运动波函数的宇称与其轨道角动量的奇偶性相同，称为轨道宇称**
- 微观粒子的 **内禀宇称** 取值为 ±1，值大致与对称性的本征因子相反：
  - 核子和电子的内禀宇称为 +1
  - 光子和  $\pi$  介子的内禀宇称为 -1
- 核子的宇称 = 内禀宇称 × 轨道宇称。且由于原子核波函数是各核子波函数的乘积，因此核宇称为各核子宇称之积，有

$$\pi_N = \prod_{i=1}^A \pi_i \prod_{i=1}^A (-1)^{l_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^A l_i}$$

一定的原子核状态具有确定不变的自旋和宇称，表示为  $I^\pi$

## 小结

- 原子核波函数的宇称由所有核子轨道角动量的总和的奇偶性来决定，偶则正
- 宇称描述的是波函数的对称性，实际上对应势函数的对称性，势函数对称，则宇称守恒

## 原子核的能量及核的壳层模型

- 原子核和原子一样，具有能级结构。基态是原子核的所有核子的能量状态整体处于最低状态时对应的状态，只存在一个；激发态是构成原子核的所有核子的能量状态整体高于基态时的状态，存在多个。激发态的能量可以达到1MeV上下，其半衰期通常在 $10^{-14}s$ 附近
- 由基态和激发态所决定的结构被称为能级结构。能级是所有核子能量状态的反映，是共同作用的结果
  - ${}^1\text{H}$ 没有能级
- 通常以四个量来描述一个能态：核自旋、核宇称、能量、半衰期
- 壳层模型：任何一个核子在其它核子形成的平均势场中运动，核子不改变能量状态，保持在特定能态上
  - 壳层模型在1949年提出，1953年提出的集体模型在壳层模型基础上发生形变，讨论了非球形核和转动、振动等集体运动
  - 原子存在壳层结构，类比在原子核，提出假设：
    - 每个能级上容纳的核子数目有一定的限制
    - 每个核子在核内的运动是独立的：泡利原理限制轨道核子数目，通过本轨道碰撞而发生跃迁的概率很低
    - 存在中心力场：其它核子所产生的平均场
  - 电子自旋磁矩和轨道运动磁矩之间会有电磁耦合关系，这使得谱线有了精细结构。但是在原子核中，由于核磁子小玻尔磁子三个量级，类似的电磁耦合关系是不能指望的，核中的耦合关系来源于核力的自旋-轨道耦合部分
  - 引入自旋轨道耦合量子数，总角动量量子数

$$j = l \pm \frac{1}{2}$$

一个能级以 $v_{lj}$ 表示，每个能级上最多能放 $2j+1$ 个核子，量子数偏高的一者能量更低

对于同一能级因自旋轨道耦合而分裂的两个能级而言，其势能差正比于 $(2l + 1)$ 。这里考虑的是轨道角动量和自旋角动量的点积的平均值，如下

$$\begin{aligned}\vec{j}^2 &= (\vec{l} + \vec{s})^2 \\ <\vec{l} \cdot \vec{s}> &= \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\hbar \\ <\vec{l} \cdot \vec{s}>_{j=l+1/2} - <\vec{l} \cdot \vec{s}>_{j=l-1/2} &= \frac{\hbar}{2}(2l+1)\end{aligned}$$

- 两个幻数间的各能级形成一个主壳层，主壳层内的每一能级被叫做支壳层。主壳层之间的能量间隔较大。质子和中子各自形成自己的壳层
- 偶偶核基态时，每一个能级上的核子数都是偶数，同能级所有核子的角动量矢量和为零，且轨道角动量相同，核子数为偶，因此偶偶核的基态自旋为0，宇称为正，即 $0^+$
- 其它核可在偶偶核基础上计算自旋和宇称

## CH2 原子核的放射性

### 大纲

- 常见射线
  - $\alpha$ 射线：氦核，带正电，贯穿本领小
  - $\beta^-$ 射线：高速电子，带负电，贯穿本领较大
  - $\beta^+$ 射线(天然放射系只存在 $\beta^-$ )：带正电的高速电子，贯穿本领较大

- $\gamma$ 射线：波长很短的电磁波，中性，贯穿本领大(中性射线在介质中的衰减服从指数衰减)
- 术语
  - 放射性：原子核自发地发射各种射线的现象
  - 放射性核素：能自发地发射各种射线的核素，也被称为不稳定核素
  - 原子核衰变：原子核自发地发生转变的现象，称为原子核的衰变
- 放射性现象与原子核变化(初末态波函数)有关(费米黄金规则2)；与核外电子状态的改变关系很小(穆斯堡尔效应)
- 原子核衰变的主要方式
  - $\alpha$ 衰变
  - $\beta^-$ 衰变
  - $\beta^+$ 衰变
  - $\gamma$ 衰变
  - 轨道电子俘获EC
  - 内转换IC
  - 重核自发裂变
  - 核子发射
- 衰变纲图的基本问题
  - 主核素是谁？四个参数
  - 子核素是哪些？
  - 主核素到子核素过程中发生了什么物理过程
  - 该过程的能量变化？
  - 每个过程对应的概率(绝对强度)？
  - 子核素是否继续衰变？如果发生 $\gamma$ 衰变，绝对强度？

## 放射性衰变的基本规律

- 由于放射源的单位时间核数目变化量 $dN(t)$ 正比于时间间隔 $dt$ 和核数目 $N(t)$ ，可以得到

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

因此**指数衰减是原子核衰变的基本规律**

- 定义衰变率是 $t$ 时刻单位时间内衰变的核数目，称为衰变率，记作 $J(t)$

$$J(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

- 定义衰变常数 $\lambda$ 是一个原子核在单位时间内发生衰变的概率，量纲为 $[t]^{-1}$
- 当一个原子核有几种衰变方式时，衰变常数等于分支衰变常数之和

$$\lambda = \sum_i \lambda_i$$

定义分支比 $R_i$

$$R_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

- 衰变纲图中的绝对强度和分支比
  - 绝对强度是针对衰变纲图中的主核素而言的，**衰变纲图中出现的所有百分数都是主核素的绝对强度**，它描述的是主核素衰变时某粒子出射或衰变途径发生的概率大小
  - 分支比是针对衰变纲图中的某个具体核素的，分支衰变对应于哪个核素，分支比就是哪个核素
  - 绝对强度是衰变纲图的全局量，分支比是局部量，二者可以相互导出
- 半衰期和平均寿命
  - 半衰期 $T_{1/2}$ 是原子核衰变概率为50%所需时间。根据指数衰变规律，在一个半衰期之后，放射源中放射性核素的数目平均减少一半

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.693}{\lambda}$$

◦ 平均寿命 $\tau$ 是放射性原子核的平均生存时间或存活概率为0的时间

$$\tau = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx 1.44 T_{1/2}$$

在平均寿命时间，剩下核素数目约为原先的37%

- 衰变宽度 $\Gamma$ 是衰变核所处能级的自然宽度，其值可以用平均寿命表示

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

具体而言，对于处于某一激发态 $E_0$ 的原子核，其能量并非确定的 $E_0$ ，而是处于以 $E_0$ 为中心的一定宽度的范围内， $E_0$ 处为峰值。因此定义衰变宽度是能量峰值的半宽(单位是能量)。

衰变宽度推导：设 $\Psi(r, t)$ 是核的波函数，由薛定谔方程，对于稳定核，其时域范围的解可表示为

$$\Psi(r, t) = \Psi(r, 0)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

考虑原子核的衰变，假设 $V'$ 是表示原子核各种衰变可能的波函数变换算符，即

$$V'_{fi} = \int \Psi_f^* V' \Psi_i dv$$

则如下的入可以量化放射源的放射强度，对应指数衰减的因子

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V'_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

该因子可以用平均寿命表示，即 $\lambda = \frac{1}{\tau}$ ，指数衰减表现在波函数的模上，有

$$|\Psi(r, t)|^2 = |\Psi(r, 0)|^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

因此波函数需要乘以平方根因子

$$\Psi(r, t) = \Psi(r, 0)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

通过傅里叶变换得到能量表示，即

$$e^{-\frac{t}{2\tau}} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(E) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} dE$$

得到

$$|A(E)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(E - 0)^2 + (\frac{\hbar}{2\tau})^2}$$

- 根据上述推导，稳定核的波函数不包含实数衰变因子，衰变宽度为0，因此**当且仅当原子核是稳定核时，其基态能级宽度为0**
- 定义放射性活度是单位时间内发生衰变的原子核数，以 $A$ 表示，反映放射源的强弱

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

放射性活度和前述的衰变率是一个东西，只用活度就好

- 历史上采用 $Ci$ (居里)作为放射性活度的单位

$$1Ci = 3.7 \times 10^{10} / s$$

后来国际计量大会规定放射性活度的单位为Bq(贝可勒尔)

$$1Ci = 3.7 \times 10^{10} Bq$$

$$1Bq = 1/s$$

注意放射性活度是指单位时间内发生衰变的原子核数目，而不等于放射源发出的粒子数目

- 定义比活度是单位质量放射源的放射性活度

$$a = \frac{A}{m}$$

小结

- 衰变是自发的过程，外在因素无法影响
- 对于任意一个原子核，其任一小时时间片段内发生衰变的概率均为 $\lambda dt$ ，因此总的衰变规律呈现指数下降
- 衰变常数 $\lambda$ 、衰变宽度 $\Gamma$ 、平均寿命 $\tau$ 、半衰期 $T_{1/2}$ 是相互关联的，知一求三，关系为

$$\lambda\tau = 1$$

$$\lambda T_{1/2} = 0.693$$

$$\Gamma\tau = \hbar$$

## 递次衰变规律

- 放射性核素的衰变子核可能会继续衰变，直到成为稳定核素为止。由此产生的多代连续放射性衰变被称为递次衰变或级联衰变
- 两次连续衰变： $A \rightarrow B \rightarrow C$ 
  - 核素A是单一放射性衰变，服从简单的指数规律 $N_1(t) = N_{10}e^{-\lambda_1 t}$ ，单位时间数目变化为 $-dN_1(t) = \lambda_1 N_1(t)dt$
  - 核素B不是简单的指数规律，包含由A衰变而来和向C衰变而去的部分，单位时间数目变化为 $dN_2(t) = \lambda_1 N_1(t)dt - \lambda_2 N_2(t)dt$ ，带入 $N_1(t)$ 表达式，解得

$$N_2(t) = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

- 核素C仅由B衰变而来，单位时间内数目变化为 $dN_3(t) = \lambda_2 N_2(t)dt$ ，带入求得的 $N_2(t)$ 表达式，得

$$N_3(t) = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) - \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \right]$$

当 $t$ 趋于无穷时， $N_3(t)$ 趋于 $N_{10}$ ，表明所有核素衰变成了稳定的C核

- 综上，三核素的数量之和是一个定值，即 $N_{10}$
- 多次连续衰变： $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1}$ (初始时仅存在 $A_1$ ，数量为 $N_{10}$ ，各核素的衰变常数为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ )
  - 通过递次求解非齐次线性微分方程，可以得到第n个核素数目随时间的变化规律

$$N_n(t) = N_{10} (c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{-\lambda_n t}) = N_{10} \sum_{i=1}^n c_i e^{-\lambda_i t}$$

$$c_i = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{(\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_2 - \lambda_i) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_i) \dots (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \dots (\lambda_n - \lambda_i)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (\lambda_k - \lambda_i)}$$

- 暂时平衡

- 条件：母核的衰变速度相较于子核较慢，即 $T_1 > T_2$ 或 $\lambda_1 < \lambda_2$ ；同时能够在实验观察时间内清晰观察到母核的放射性变化，即 $T_1$ 不是非常大
- 结果：在经过足够长的时间后，子核与母核的数目成固定比例，且子核按照母核的半衰期衰减
- 推导：考虑 $N_2(t)$ 的表达式，由于 $\lambda_1 < \lambda_2$ ，当 $t$ 足够大时，指数因子可以忽略，得到

$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

这一比例与1的大小关系不确定。此外，两核的放射性活度的关系为

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2 N_2(t)}{\lambda_1 N_1(t)} \approx \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} > 1$$

这说明子核的活度大于母核的活度

- $N_2(t)$ 存在极大值：求导可得，极大值点位于 $t = t_m = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ 。另外，由于B核单位时间数目变化等于母子核活度之差，因此 $N_2(t)$ 取极大值时两核的活度相等，在此之前 $A_1 > A_2$ ，之后 $A_1 < A_2$
- 在活度-时间坐标系中，时间足够长之后，母子核的活度曲线平行（子核略大），说明它们的比值保持恒定，衰变规律是相同的，都按照母核的半衰期来衰减
- 子核数量最大值点 $t_m$ 受衰变较快的子核的半衰期影响更大
- 对于多代连续放射性衰变，只要母核 $A_1$ 的衰变常数最小，就可以建立起按照 $A_1$ 的半衰期进行衰变的暂时平衡。最终平衡后，各代子核的数量及活度之比不随时间变化
- 长期平衡
  - 条件：母核的衰变速度远小于子核，即 $T_1 \gg T_2$ 或 $\lambda_1 \ll \lambda_2$ ；与短期平衡相对的，在实验观察时间内，无法观察到母核的放射性变化
  - 结果：在经过足够长的时间后，子核的原子核数目与放射性活度达到饱和，且子核和母核的放射性活度相等，子核按照母核的半衰期衰减
  - 推导：考虑 $N_2(t)$ 的表达式，由于 $\lambda_1 \ll \lambda_2$ ，当 $t$ 足够大时，有

$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} \approx 1$$

这说明子核的活度与母核相等

- 在活度-时间坐标系中，时间足够长之后，母子核的活度曲线（近似）重合
- 子核数量和活度最大值点 $t_m$ 不变，受子核半衰期的影响更大
- 对于多代连续放射性衰变，只要母核 $A_1$ 的衰变常数足够小，会按照 $A_1$ 的半衰期建立长期平衡体系，最终各子核的核数目保持固定比例，即

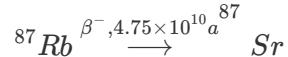
$$N_i(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} N_1(t)$$

，且各代子核的放射性活度都与母核相同

- 逐代衰变
  - 条件：母核衰变比子核快，即 $T_1 < T_2$ 或 $\lambda_1 > \lambda_2$
  - 结果：无法建立平衡；当时间足够长，母核几乎全部衰变，转换成子核；子核按照自己的衰变常数衰变，之后的平衡类型可以是三者中的任何一种
  - 推导：考虑 $N_2(t)$ 的表达式，当时间足够大时，含 $\lambda_1$ 的指数项可以忽略，且母核的活度趋于零
  - 在活度-时间坐标系中，时间足够长后，只有子核在按照自己的半衰期衰变
  - 子核数量和活度最大值点 $t_m$ 不变，受母核半衰期的影响更大
  - 对于多代连续放射性衰变，不会形成平衡

# 放射系

- 目前地球上还存在有三个天然放射系，分别是
  - 钷系 $^{232}_{90}Th$ ,  $T_{1/2} = 1.4 \times 10^{10} a$
  - 铀系 $^{238}_{92}U$ ,  $T_{1/2} = 4.468 \times 10^9 a$
  - 钔铀系 $^{235}_{92}U$ ,  $T_{1/2} = 7.038 \times 10^8 a$
- 一般将按照4的倍数来划分放射系，因此可以分为四类，其中三类的半衰期足够长，是今天的天然放射系
  - 钷系(4n)
  - 镉系(4n+1)(天然放射系中不存在这一系，因为它的起点 $^{237}_{93}Np$ 半衰期仅为214万年，需要人工制造这一系)
  - 铀系(4n+2)
  - 钔铀系(4n+3)
- 通常使用锶铷比例来判断地球年龄。相关的衰变反应是



由于 $^{87}Sr$ 和 $^{86}Sr$ 都是稳定核素，且后者数量稳定，不会由别的核素衰变而来。我们假设在地球形成之初，各处的Sr丰度是常数，则有

$$\frac{^{87}Sr(t_1)}{^{86}Sr(t_1)} = \frac{^{87}Rb(t_1)}{^{86}Sr(t_1)} [e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1] + \frac{^{87}Sr(t_0)}{^{86}Sr(t_0)}$$

因此可以通过多地采样，进行直线拟合计算斜率，得到地球寿命

- 在长期平衡中，所有子核均按照母核的半衰期衰变，活度相同，因此数量之比是衰变常数的倒数比，因此**衰变常数最大的子核的核素数量最少**
- 三个天然放射系均以 $^{82}Pb$ 为终点(三个铅的稳定同位素，质量数分别为206,207,208)，这是因为铅核稳定，质子数是幻数，且 $^{208}_{82}Pb$ 对应的核的中子数为126，也是幻数
- 天然放射系的衰变过程大多是 $\alpha$ 衰变，少数是 $\beta$ 衰变，一般都伴随有 $\gamma$
- 由于放射系的起点重核一般都位于 $\beta$ 稳定线末端附近，是中子数大于质子数的区域，且 $\alpha$ 衰变的方向是与中子轴成45度的，这导致大部分子核都具有 $\beta^-$ 衰变放射性，而没有 $\beta^+$ 放射性或轨道电子俘获

## 放射规律的一些应用

- 放射源活度修正

$$A(t) = A(0)e^{-\lambda t} = \lambda N(0)e^{-\lambda t}$$

- 确定放射源组成和性质
- 一般利用反应堆或加速器人工制备放射源，需要确定源的活度和最佳制备时间。假设带电粒子束或中子束的强度是一定的，则放射性核素的产生率P是恒定不变的，有

$$P = N_{target}\sigma_0\Phi$$

同时，源在制备过程中在进行衰变，故总的生成放射性核素的数目的变化率为

$$\frac{dN(t)}{dt} = P - \lambda N(t)$$

考虑边界条件，初始时不存在放射性核素，有

$$N(t) = \frac{P}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

制备了t时间后，源的活度变为

$$A(t) = N_{target}\sigma_0\Phi(1 - e^{-\lambda t})$$

影响源活度的因素共有5个，分别是

1. $N_{target}$ :靶核A的数量，无量纲
2. $\sigma_0$ :中子与A的反应截面， $cm^2$
3. $\Phi$ :中子注量率, $1/cm^2/s$
4. $\lambda$ :余核B的衰变常数, $1/s$
5. $t$ :照射时间,s

定义饱和因子 $s = (1 - e^{-\lambda t})$ ，随着照射时间增大，人工放射源的放射性活度增大，并逐渐趋于稳定，即

$$A_{max}(t) = P = N_{target}\sigma_0\Phi$$

在照射时间足够长时，影响源活度的因素只剩3个

- 人工制备放射源时，假设制备条件是稳定的，则可以类比长期平衡的过程，“母核”的活度是稳定的，子核的活度持续增加，但永远无法追上。由于饱和特性曲线，一般在子核的数个半衰期之后分离子核，结束制备
- 放射性鉴定法：例如 $^{14}C$ 断代年代法。 $^{14}C$ 具有 $\beta^-$ 放射性，半衰期5700年，可用于考古学中的年代测定。由于生物体的气体交换，活体内的 $^{12}C$ 和 $^{14}C$ 比例与大气相同，而生命结束后，生物体内的 $^{14}C$ 不断衰变，数目减少
- 短寿命核素发生器(“母牛”)：核医学需要短寿命放射性核素来作为标记核素，例如 $^{99m}Tc$ ，但是由于这类核素衰变速度过快，不利于储存和运输。因此实践中使用寿命较长的核素来不断产生短寿命子核，需要时将子核分离出来，即所谓“母牛”。一组母核半衰期远大于子核的衰变反应，均可被视为“母牛”。

注意在分离子核时，以子核放射性活度达到最大值为依据，即

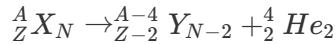
$$t_m = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

## CH3 原子核的衰变

- 不稳定核在变成更稳定核的过程中，会发生 $\alpha$ 衰变、 $\beta$ 衰变、 $\gamma$ 衰变、中子发射、质子发射或自发裂变等过程

### $\alpha$ 衰变

- 形式



- 发生 $\alpha$ 衰变的一般为重核，质量数大于140
- 衰变时释放能量的范围在 $4 \sim 9 MeV$ 之间，是一个较为中和的数值
- 半衰期范围较大，从 $10^{-7}s$ 到 $10^{15}s$ 均有分布。衰变能增大两倍，对应的半衰期下降20多个数量级，变化十分敏感
- 库仑排斥力是 $\alpha$ 衰变得以发生的重要因素。因为随着质量数的上升，比体积能不变、比表面能减小、比库仑能增大、比对称能增大，其中比库仑能是使得重核的比结合能下降的重要因素，导致了在重核区域， $A$ 越大原子核越不稳定

没有发生发射其它带正电粒子的衰变，是因为衰变是一个自发的过程，有释放能量的前置条件。事实上是可以发射 $^8Be$ ,  $^{12}C$ ,  $^{14}C$ 等粒子的，但是概率极小

### $\alpha$ 衰变的衰变能

- 假设衰变前母核静止，则衰变前后粒子静止质量之差等于衰变子核和 $\alpha$ 粒子动能和。定义 $\alpha$ 衰变能等于子核和 $\alpha$ 粒子动能之和，对应衰变前后静止质量之差，记作 $E_0$

$$E_0 = T_\alpha + T_Y = [m_X - (m_Y + m_\alpha)]c^2$$

以原子质量M代替原子核质量m，并忽略电子结合能的差异，有

$$\begin{aligned}
E_0 &= M(Z, A)c^2 - [M(Z-2, A-4) + M(2, 4)]c^2 \\
&= \Delta(Z, A) - [\Delta(Z-2, A-4) + \Delta(2, 4)] \\
&= B(Z-2, A-4) + B(2, 4) - B(Z, A)
\end{aligned}$$

- $\alpha$ 衰变发生的**必要条件**是  $E_0 > 0$ , 即母核原子的质量大于子核原子与 ${}^4He$ 原子质量之和
- 由于液滴模型中核素结合能表达式可以写作

$$B_c = -a_c \cdot Z^2 A^{-1/3}$$

因此在局部, 当Z一定时, 随着A增大, 结合能变大,  $\alpha$ 衰变能变小; 整体上,  $A(Z)$ 越大,  $\alpha$ 衰变能越大

- 当母核的中子数是126时,  $\alpha$ 衰变能很小; 当子核的中子数是126时,  $\alpha$ 衰变能是局部极大, 壳层模型导致了邻居之间半衰期的巨大区别

## $\alpha$ 衰变能与核能级图

- 根据能动量守恒计算可得, 若反应前母核静止, 则反应的 $\alpha$ 衰变能与 $\alpha$ 粒子动能直接相关, 有

$$E_0 = \frac{m_Y + m_\alpha}{m_Y} T_\alpha \approx \frac{A}{A-4} T_\alpha$$

- 相互平行的多个 $\alpha$ 衰变可以反映母子核的能级结构, 具体有两种形式

- 单一能级衰变的母核的不同 $\alpha$ 衰变能反映了子核有多个能级, 且能级能量可以由 $\alpha$ 衰变能求出
- 多能级母核到子核基态的不同 $\alpha$ 衰变能反映了母核的多个能级, 且能级能量可以分别求出
  - 以母核的单一能级衰变为例演示计算过程: 根据几种情况下 $\alpha$ 粒子的动能  $T_\alpha$ , 通过近似式  $E_0 = \frac{A}{A-4} T_\alpha$  得到各自衰变能, 这些衰变能之间的差异, 对应的是子核Y不同能级的质量差, 进而可知其能级结构
  - **如何确定基态:** 最大的衰变能很可能对应的就是子核的基态, 但是需要验证, 利用已知的原子基态的质量, 计算衰变能, 对比是否和最大衰变能对应。因此在画 $\alpha$ 衰变纲图时, 第一步应该是验证哪一个衰变能对应基态的原子质量差

## $\alpha$ 衰变的衰变常数

- $\alpha$ 粒子在核内感受到核力和库仑力两种力, 其势垒表现为反比例函数。 $\alpha$ 粒子相对于子核的势能为

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R \\ \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \end{cases}$$

根据量子力学隧穿效应相关理论, 微观粒子以一定概率穿透势垒, 概率依赖于粒子质量m、势垒宽度a和势能差( $V_0 - E$ )。对于方势垒, 当  $\kappa a \gg 1$  时, 概率约等于

$$P \approx e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}$$

对于其它形状的势垒函数, 可以视为方势垒的微元累加, 概率之积, 即

$$P = e^{-2 \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_R^b \sqrt{V(r)-E_0} dr} = e^{-2G}$$

当势垒厚度b(定义为同等能量的概率波穿透势垒时所需要经过的距离, 图像上表现为水平线交点距离)远大于R时, 上式中的G(Gamow factor)满足

$$2G = \frac{Z_Y e^2 \sqrt{2m_\alpha}}{2\epsilon_0 \hbar \sqrt{E_0}} + \frac{4e \sqrt{m_\alpha R Z_Y}}{\sqrt{\pi \epsilon_0 \hbar}}$$

$\lambda$ 是单位时间内发生 $\alpha$ 衰变的几率, 等于  $nP$ , 其中n是 $\alpha$ 粒子访问边界的频率

${}_Z^AX$ 核作为出射粒子(类似 $\alpha$ 粒子扮演的角色)时, 其势垒高度为

$$V(R) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{1}{A^{1/3} + A_Y^{1/3}} \frac{ZZ_Y}{}$$

一般  $r_0$  会取 1.2 fm

- 重核素衰变时除了发生  $\alpha$  衰变，也有可能发射  $^{12}C$ ，但是后者发生的概率很低，这是因为  $^{12}C$  衰变的势垒更高更厚，分别相对于两衰变的衰变能而言， $^{12}C$  衰变需要穿透的势垒厚度更大
- 由于实际实验得到的一系列  $\alpha$  衰变的半衰期略大于量子力学给出的理论结果，人们引入阻碍因子来解释这种差别。认为  $\alpha$  粒子并非早已存在，是在衰变过程中产生的；由于离心势的存在使势垒加高变厚，更难穿透，因此衰变常数减小

## 小结

- $\alpha$  粒子穿透势垒的概率是决定  $\alpha$  衰变常数大小的最主要因素，“访问频率”则相对而言是次要的，不同  $\alpha$  衰变的差别不大
- 衰变能越大，要穿透的势垒越薄，高度越低，因此衰变得越快
- 当  $\alpha$  粒子有要带走角动量的任务时，要穿透的势垒厚度会因为离心势的缘故而加高加厚，减小了衰变常数

## $\alpha$ 衰变的反应禁戒：宇称和角动量守恒

- 由于  $\alpha$  衰变的衰变能集中在  $4 \sim 9 MeV$  之间，而  $\alpha$  粒子跃迁到第一激发态需要的能量为  $20 MeV$ ，因此衰变产生的  $\alpha$  粒子只能处于基态，自旋宇称为  $0+$ 。为了满足衰变过程中的角动量和宇称守恒， $\alpha$  粒子需要带走一定的轨道角动量  $l_\alpha$ 。假设衰变前后母子核的自旋大小分别为  $I_i, I_f$ ，则  $l_\alpha$  的取值可以从  $|I_i - I_f|$  到  $I_i + I_f$ ，一共有  $2 \times \min(I_i, I_f) + 1$  种可能。此外， $\alpha$  粒子的宇称为  $(-1)^{l_\alpha}$ ，因此对于某些母子核组合，产生的  $\alpha$  粒子的自旋宇称不能取某些值，甚至无法发生衰变，称为反应禁戒
- 以偶偶核到偶偶核的  $\alpha$  衰变反应为例，由于母子核的自旋均为 0，因此  $\alpha$  粒子的自旋也为 0，宇称为正，这说明母子核宇称必须一致，否则无法发生  $\alpha$  衰变
- 以偶偶核作为母核的  $\alpha$  衰变反应为例，由于母核的自旋为 0，因此子核和  $\alpha$  粒子的自旋相同， $\alpha$  粒子的宇称由子核的自旋奇偶性决定。假设母核的宇称为正，子核的宇称为负，则  $\alpha$  粒子的宇称必须为负，即子核的自旋必须为奇数，否则无法发生  $\alpha$  衰变

## $\beta$ 衰变

- $\beta$  衰变是指原子核自发地放出  $\beta$  粒子或俘获轨道电子，并转变成另一种原子核的现象，称为  $\beta$  衰变，有三种形式
  - 原子核衰变时发射负电子，称为  $\beta^-$  衰变
  - 原子核衰变时发射正电子，称为  $\beta^+$  衰变
  - 原子核从核外的电子壳层俘获一个轨道电子，称为轨道电子俘获 EC
- $\beta$  衰变的特点
  - $\beta$  放射性核素遍及整个元素周期表
  - $\beta$  衰变中原子核只改变电荷数  $Z$ ，不改变质量数  $A$ ，是等量异位素之间的变换
  - $\beta$  衰变的半衰期范围  $10^{-3}s \sim 10^{24}s$
  - $\beta$  衰变产生的电子能谱分布是连续的，最大能量可分布在  $10keV \sim 1MeV$  数量级
- 等量异位素的质量变化：不考虑电子结合能，认为原子质量为

$$M(Z, A) = ZM(^1H) + (A - Z)m_n - B(Z, A)/c^2$$

根据液滴模型，带入原子核结合能公式，可得

$$M(Z, A) = a_c Z^2 A^{-1/3} + a_{sym} \left( \frac{A}{2} - Z \right)^2 A^{-1} + Z[M(^1H) - m_n] - \delta a_p A^{-1/2} + C$$

不考虑  $A$  的变化，则这是关于  $Z$  的二次函数。另外通过求导可得

$$\frac{dM(Z, A)}{dZ} = 0 \rightarrow Z = \frac{[M(^1H) - m_n] + a_{sym}}{\frac{2a_c}{A^{1/3}} + \frac{2a_{sym}}{A}}$$

这是等量异位素中质量过剩最小的核素，是最稳定的核素

虽然讨论的是等量异位素之间的质量差别，但是由于公式中存在与Z和A的奇偶性相关的对称能项，因此当A的奇偶性不同时，抛物线形状也不同

- 对于奇A核，对称能项为0，因此在“质量过剩~Z”图像上只存在一条抛物线。在谷底左侧的核素具有 $\beta^-$ 放射性，在谷底右侧的核素具有 $\beta^+$ 放射性
- 对于偶A核，当Z偶时， $\delta$ 取正，反之取负，因此在“质量过剩~Z”图像上存在两条抛物线，且奇Z核素对应的抛物线略高于偶Z核素。核素趋向于向两侧质量过剩较低的核素衰变，因此某些核同时具有 $\beta^+$ ,  $\beta^-$ 放射性

## 中微子假说

- 由于单纯由母核衰变为子核和 $\beta$ 粒子的过程无法解释如下的一些疑问，提出了中微子假说
  - 发射的 $\beta$ 粒子能量是连续的，但是核能级是连续的，简单的两体模型无法解释
  - 原子核由质子和中子组成， $\beta$ 粒子的来源无法解释
  - $\beta$ 粒子的自旋为 $1/2$ ，衰变方程无法满足角动量守恒
  - 从费米子到玻色子，统计性诠释发生了变化
- 为了解释这些疑问，泡利和费米相继尝试提出中微子假说：原子核在 $\beta$ 衰变的过程中，不仅放出一个 $\beta$ 粒子，同时还放出一个中性微小粒子。在23年后，实验中检测到了反电子中微子
- 中微子的性质
  - 电荷为零
  - 自旋为 $1/2\hbar$ ，服从费米统计
  - 质量约为0，上限不超过 $7.3\text{eV}$
  - 磁矩非常小，上限不超过 $10^{-6}\mu_N$
  - 与物质的相互作用非常弱，属于弱相互作用

中微子不会受到强作用力，能够轻松穿过地球。利用作用截面和通常的原子密度，可以估算其平均自由程为

$$l = \frac{1}{N\sigma} \approx \frac{1}{10^{22} \times 10^{-43}} \text{cm} = 10^{16} \text{km} \gg 1.3 \times 10^4 \text{km(Earth)}$$

- 中微子与反中微子
  - 质量、电荷、自旋和磁矩没有区别
  - 二者自旋方向不同，相互作用性质不同。中微子是左旋粒子，反中微子是右旋粒子

## $\beta$ 衰变的三种类型

- 引入中微子后， $\beta$ 衰变成为三体问题，定义 $\beta$ 衰变能为

$$E_0 = T_R + T_\beta + T_v$$

但EC衰变只有两个产物，即子核和中微子

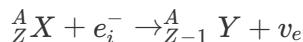
- 在 $\beta^-$ 衰变过程中放出电子和反中微子：



- 在 $\beta^+$ 衰变过程中放出正电子和中微子：



- 在轨道电子俘获过程中放出中微子：



- $\beta^\pm$ 衰变末态三体，能量分配方式不唯一；轨道电子俘获末态两体，能量分配方式唯一
- 丰中子核素大多具有 $\beta^-$ 衰变性；丰质子核素可以发生 $\beta^+$ 或EC

- 定义 $\beta^-$ 衰变放出的动能 $T_Y + T_{\beta^-} + T_{v_e}$ 为 $\beta^-$ 衰变能

$$\begin{aligned}
E_0(\beta^-) &= (m_X - m_Y - m_e)c^2 \\
&\approx (M_X - M_Y)c^2 \\
&= \Delta(Z, A) - \Delta(Z + 1, A)
\end{aligned}$$

因此发生 $\beta^-$ 衰变的条件为

$$E_0(\beta^-) > 0 \Leftrightarrow \Delta(Z, A) > \Delta(Z + 1, A)$$

- 定义 $\beta^+$ 衰变放出的动能 $T_Y + T_{\beta^+} + T_{v_e}$ 为 $\beta^+$ 衰变能

$$\begin{aligned}
E_0(\beta^+) &= (m_X - m_Y - m_e)c^2 \\
&\approx (M_X - M_Y - 2m_e)c^2 \\
&= \Delta(Z, A) - \Delta(Z - 1, A) - 2m_e c^2
\end{aligned}$$

因此发生 $\beta^+$ 衰变的条件为

$$E_0(\beta^+) > 0 \Leftrightarrow \Delta(Z, A) > \Delta(Z - 1, A) + 2m_e c^2$$

- 与 $\beta^\pm$ 衰变的能量守恒方程不同，EC衰变的反应核是母核和核外电子，且需要考虑核外电子的能级差异，能量守恒方程为

$$m_X c^2 + m_e c^2 - \epsilon_i = m_Y c^2 + m_v c^2 + T_Y + T_{v_e}$$

定义EC衰变放出的动能 $T_Y + T_{v_e}$ 为其衰变能

$$\begin{aligned}
E_0(\epsilon) &= (m_X + m_e - \epsilon_i/c^2 - m_Y)c^2 \\
&\approx (M_X - M_Y)c^2 - \epsilon_i \\
&= \Delta(Z, A) - \Delta(Z - 1, A) - \epsilon_i
\end{aligned}$$

因此发生EC衰变的条件是

$$M_X(Z, A) - M_Y(Z - 1, A) > \frac{\epsilon_i}{c^2}$$

轨道电子俘获涉及的电子能级通常在KLM三层，高Z元素的K层电子最容易被俘获。若衰变能不高，K俘获无法发生，则看L/M俘获

各层级电子结合能公式如下

$$B_e(K) \approx Ry(Z - 1)^2 [eV]$$

$$B_e(L) \approx \frac{1}{4} Ry(Z - 5)^2 [eV]$$

$$B_e(M) \approx \frac{1}{9} Ry(Z - 13)^2 [eV]$$

$$1Ry = 13.6eV$$

- 判断轨道电子俘获发生：当一个内层轨道电子被原子核俘获时，会在轨道上空出缺位，导致某个外层电子向内跃迁到该空位上，释放的能量有两种出路
  - 其一：以光子形式释放跃迁能量，其波长在X射线范围内，因此会释放**特征X射线**，可用做EC特征判据
  - 其二：光子能量传导到某个外层电子上，将该电子打出原子，被称作**俄歇电子**，可用做EC特征判据

以 $L \rightarrow K$ 壳层为例，出射X射线能量为

$$E_X = h\nu = \epsilon_K - \epsilon_L$$

$\epsilon$ i俄歇电子能量则为吸收的光子能量与本能级势能之差，例如从L层出射的电子，吸收上述光子能量，则其能量为

$$T_e = (\epsilon_K - \epsilon_L) - \epsilon_L = \epsilon_K - 2\epsilon_L$$

- 对比 $\beta^+$ 衰变和轨道电子俘获的衰变条件要求

$$\begin{cases} M_X(Z, A) - M_Y(Z-1, A) > 2m_e \\ M_X(Z, A) - M_Y(Z-1, A) > \epsilon_i/c^2 \end{cases}$$

由于电子静质量能量远大于轨道电子能量，即 $2m_e c^2 \gg \epsilon_i$ ，因此如果一个原子满足 $\beta^+$ 衰变的条件，则它一定也满足发生EC衰变的条件

- 一般情况下，母子核的质量差较大时，有两种衰变方式，质量差较小时则只有EC一种衰变方式。此外，由于EC是两体问题，**EC的中微子能量是单立的**
- 轻核的质量差较大，衰变能较大， $\beta^+$ 衰变几率远大于EC几率
- 重核的质量差较小，衰变能较小，EC几率远大于 $\beta^+$ 几率
- 中等质量核的两种衰变几率相仿
- e.g. 在EC发生之后，可能看到：
  - 动能取分立值的子核Y
  - 动能取分立值的电子中微子 $v_e$
  - 能量取分立值的X射线
  - 动能取分立值的负电子
- 有一些核可能同时满足三个条件，以三种方式进行衰变，各有一定的分支比

## $\beta$ 衰变的费米理论和选择定则

### $\beta$ 衰变跃迁几率公式

- 费米黄金规则(Fermi's Golden Rule)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |v_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

其中 $\lambda$ 是衰变常数； $V_{fi} = \int \psi_f^* V \psi_i dv$ 是跃迁矩阵元，其中 $V$ 是状态转移算符； $\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f}$ 是末态状态密度

- 量子力学的微扰理论给出，单位时间内发射动量处于 $p \sim p + dp$ 间的 $\beta$ 粒子的概率为

$$I(p_\beta) dp_\beta = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_f^* H \psi_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dT_\beta}$$

- **跃迁矩阵元及末态密度推导：**上式中 $dn$ 表示动量处于 $p \sim p + dp$ 对应的量子态数， $\psi_i = u_i$ 表示始态母核波函数， $\psi_f = u_f \phi_\beta \phi_v$ 表示末态，即子核、 $\beta$ 粒子和中微子波函数， $H = g$ 描述弱作用强度

$$\Rightarrow I(p_\beta) dp_\beta = \frac{2\pi g^2}{\hbar} \left| \int u_f^* \phi_\beta^* \phi_v^* u_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dT_\beta}$$

由于原子核对电子和中微子的波场影响较小，近似视电子和中微子为自由粒子，用平面波描述 $\beta$ 粒子和中微子的波函数，即有

$$\begin{aligned} \phi_\beta^* &= V^{-1/2} e^{-ik_\beta \cdot r} \\ \phi_v^* &= V^{-1/2} e^{-ik_v \cdot r} \end{aligned}$$

进而可以将积分项归化为跃迁矩阵元 $M_{if}$

$$\begin{aligned} M_{if} &= \int u_f^* \phi_\beta^* \phi_v^* u_i d\tau \\ &= \int u_f^* u_i e^{-i(k_\beta + k_v) \cdot r} d\tau \end{aligned}$$

由于矢量上的 $p + dp$ 在三维空间里表现为一个球壳体积，因此动量空间的允许状态数为 $4\pi p^2 dp$ ，三维普通空间的允许状态数为 $V$ ，相空间的体积元(相格)大小为 $(2\pi\hbar)^3$ ，因此中微子和 $\beta$ 粒子的相空间允许量子态数均可写作

$$dn_i = \frac{4\pi p_i^2 dp_i \times V}{(2\pi\hbar)^3}, i = v, \beta$$

由于 $\beta$ 衰变末态是三体问题，有动量约束存在，因此两个粒子的状态总数即为三个粒子的状态总数，故总末态数

$$dn = dn_\beta \times dn_v$$

$\beta$ 粒子单位能量区间的末态密度

$$\frac{dn}{dT_\beta} = \frac{dn_\beta dn_v}{dT_\beta} = \frac{p_\beta^2 p_v^2 dp_\beta dp_v}{4\pi^4 \hbar^6 dT_\beta} V^2$$

由于子核质量远大于 $\beta$ 粒子和中微子，因此在能量守恒式中，子核的动能可以近似忽略，即

$$T_v + T_\beta = E_0$$

由于中微子质量极小，可以认为它的动能量满足类似光子的 $T_v = cp_v$ ，带回上式有

$$p_v = \frac{E_0 - T_\beta}{c} \Rightarrow \frac{dp_v}{dT_\beta} = \frac{-1}{c}$$

带入到末态密度式中，有

$$\frac{dn}{dT_\beta} = \frac{p_\beta^2 (E_0 - T_\beta)^2 dp_\beta}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} V^2$$

◦  $m_v = 0$ 时的 $\beta$ 衰变跃迁几率公式：综合上述推导的结果，以及 $T_\beta$ 等于总能量与静能量之差的结论式，得到

$$I(p_\beta) dp_\beta = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (E_0 - \sqrt{p_\beta^2 c^2 + m_0^2 c^4} + m_0 c^2)^2 p_\beta^2 dp_\beta$$

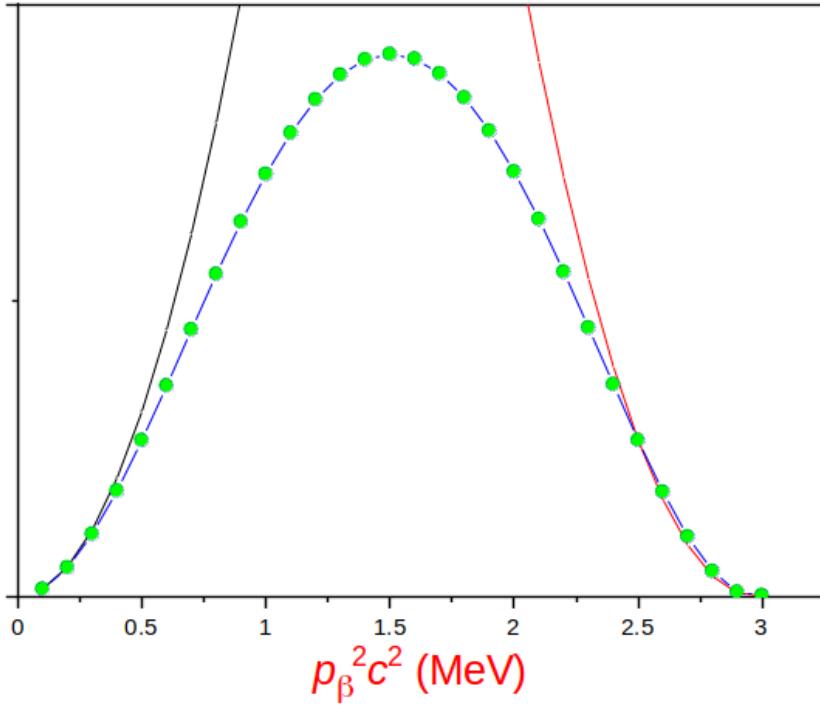
▪ 当 $\beta$ 粒子动量极小时，趋近于0，则

$$I(p_\beta) \approx \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} E_0^2 p_\beta^2$$

▪ 当 $\beta$ 粒子动量趋近于允许的极大值时，通过设 $p_\beta = p_{\beta,\max} - \Delta p_\beta$ ，可以化简原式为

$$I(p_\beta) = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \left( \frac{p_{\beta,\max}^2 c^2}{E_0 + m_0 c^2} \right)^2 \Delta p_\beta^2$$

▪ 根据上述推导，当 $\beta$ 粒子的动量处于两个边缘时，曲线类似抛物线，整体类似高斯分布，曲线示意图如下



- 库仑改正因子修正：实验中发现， $\beta$ 衰变跃迁几率与电性相关， $\beta^+$ 和 $\beta^-$ 衰变的 $\beta$ 谱形状略有不同。考虑核库仑场的影响，加上库仑改正因子，得到跃迁几率公式

$$I(p_\beta)dp_\beta = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} F(Z, T_\beta) (E_0 - T_\beta)^2 p_\beta^2 dp_\beta$$

当 $Z$ 较小时，用非相对论近似

$$F(Z, T_\beta) = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

$$\begin{cases} x = +\frac{2\pi Zc}{123v_\beta}, \beta^- decay \\ x = -\frac{2\pi Zc}{123v_\beta}, \beta^+ decay \end{cases}$$

## 小结

- 末态密度是费米黄金规则中重要的一项。一方面，它决定了 $\beta$ 粒子的动量谱是两个抛物线的折中(另外还要考虑库仑改正因子的修正作用)；另一方面，它会影响衰变速度。直观地看，末态密度越大，意味着母核衰变为子核时的去向越多，衰变速度越快
- 除了末态密度之外，跃迁矩阵元对 $\beta$ 衰变速度有着更本质的影响
- 跃迁几率公式里已经包含了三部分：跃迁矩阵元、末态密度以及库仑改正因子，现在考虑跃迁矩阵元的影响

$$M_{if} = \int i_f^* u_i e^{-i(k_\beta + k_v) \cdot r} d\tau$$

其中  $k = \frac{p}{\hbar}$

- 对两轻子项的平面波近似指数项做泰勒展开，得到

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(p_\beta + p_v) \cdot r} = 1 + \frac{(p_\beta + p_v) \cdot r}{\hbar} \cdot \frac{(-i)^1}{1!} + \left[ \frac{(p_\beta + p_v) \cdot r}{\hbar} \right]^2 \cdot \frac{(-i)^2}{2!} + \dots + \left[ \frac{(p_\beta + p_v) \cdot r}{\hbar} \right]^l \cdot \frac{(-i)^l}{l!} + \dots$$

通过简单举例计算可以得知，在级数中，第一项的贡献最大，以后各项依次很快递减，例如第二项约为第一项的  $\frac{1}{10} \sim \frac{1}{100}$

- 将平面波按照不同的轨道角动量正交分解成球面波

$$e^{-i(k_\beta + k_v) \cdot r} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^l j_l[(k_\beta + k_v) \cdot r] P_l(\cos \theta)$$

由于  $(k_\beta + k_v) \cdot r \ll 1$ , 因此球贝塞尔函数渐近为

$$j_l[(k_\beta + k_v) \cdot r] \approx \frac{[(k_\beta + k_v) \cdot r]^l}{(2l+1)!!}$$

平面波原式改写为

$$\psi = e^{-i(k_\beta + k_v) \cdot r} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)(-i)^l}{(2l+1)!!} [(k_\beta + k_v) \cdot r]^l P_l(\cos \theta)$$

- 球面波分解各项的模和正交性分析：对于勒让德函数项，其各项内积满足

$$\frac{1}{4\pi} \int P_l(\cos \theta) \cdot P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2l+1} \delta(l-l')$$

因此各项出现的概率是各项模方，概率级差( $l$ 级出现概率除以( $l-1$ 级))为  $\frac{(kr)^2}{4l^2-1}$ ，前几项概率值如下

$$(kr)^0 \rightarrow \frac{1}{3}(kr)^2 \rightarrow \frac{1}{45}(kr)^4 \rightarrow \frac{1}{1575}(kr)^6 \rightarrow \dots$$

- 将球面波分解的轻子波函数带入跃迁矩阵元，第一项贡献最大，以后各项依次很快递减。若第一项( $l=0$ )被允许有贡献，则

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(p_\beta + p_v) \cdot r} \approx 1 \Rightarrow M_{if} = \int u_f^* u_i d\tau = M$$

此时跃迁被称作**允许跃迁**， $M$ 被称作原子核矩阵元，只与衰变过程中的原子核有关，与轻子无关。允许跃迁衰变常数较大，但是当  $l = 0\hbar$  项被禁戒而贡献为零时，需要考虑  $l > 0\hbar$  的禁戒跃迁：

- 当第2项( $l = 1\hbar$ )为主要贡献时，称为一级禁戒跃迁
- 当第( $n+1$ )项( $l = n\hbar$ )为主要贡献时，称为n级禁戒跃迁

由于  $(k_\beta + k_v) \cdot r \approx 0.1 \sim 0.01$ ，各级次跃迁概率间相差平均4个数量级

## 小结

- 注意这里分解得到的各  $l\hbar$  对应项是指轻子组带走的**轨道角动量**为  $l\hbar$ ，而非总角动量，还要考虑自旋
- 真正的  $\beta$  衰变中，不同的分量不一定按照分析的比例出现，实际要看母子核之间的自旋宇称关系

## $\beta$ 衰变的选择定则

- $\beta$  衰变过程中母子核的角动量差由两个轻子的自旋和轨道角动量决定。对于允许跃迁，即轻子组的轨道角动量为  $0\hbar$  的情况，母子核的角动量差由轻子总自旋提供，有两种模式
  - 费米(F)选择定则： $s = 0$ ，电子和中微子自旋反平行，轻子自旋单态。对应母子核的角动量差为0，且宇称相同的情况
  - 伽莫夫-泰勒(G-T)选择定则： $s = 1$ ，电子和中微子自旋平行，轻子自旋三重态。对应母子核角动量差为1，且宇称相同的情况

由于跃迁矩阵元是正数，因此积分函数是偶函数，可以得知  $\beta$  衰变的宇称选择定则是

$$\pi_i \pi_f (-1)^l = +1$$

即轻子组的轨道角动量对宇称守恒的贡献表现为  $(-1)^l$ ，与  $\alpha$  衰变类似。对于允许跃迁，由于  $l = 0$ ，因此母子核宇称必须一致

- 对于一级禁戒跃迁， $l = 1$ ，因此母子核的宇称相反，允许的角动量差值可以是  $0, 1, 2$
- 对于二级禁戒跃迁， $l = 2$ ，因此母子核的宇称相同，允许的角动量差值可以是  $2, 3$ ，不包含  $1$ ，因此如果角动量差为  $1$ ，且宇称相同，大概率发生允许跃迁

- 总结而言，对于第 $n = 2m$ 级禁戒跃迁， $l = n = 2m$ ，母子核的宇称相同，特许的角动量差值是 $n, n + 1$ ；对于第 $n = 2m + 1$ 级禁戒跃迁， $l = n = 2m + 1$ ，母子核的宇称相反，特许的角动量差值是 $n, n + 1$
- 注意可能的符号歧义，以上提到的角动量差值指的是实际的母子核的角动量矢量差在Z轴的投影值， $\Delta I$ 的取值范围是母子核的角动量矢量差的所有可能取值，上面提到的“角动量差值”如果用 $\Delta I$ 来表示，默认指的是 $\Delta I$ 取最大取值的情况。
- 对于 $2^+ \rightarrow 2^+$ 的衰变，也是有可能发生二级禁戒跃迁的，因为它们的角动量差可以取 $0 \sim 4$ ，但是相比允许跃迁，发生的概率很小
- 由于中微子具有单项自旋性，有中微子参与的衰变反应大多宇称不守恒，包括 $\beta$ 衰变**

## $\beta$ 能谱形状与居里描绘

- 对于允许跃迁，跃迁矩阵元 $M_{if}$ 与轻子能量无关，仅由母子核波函数决定，因此下式中的 $M_{if} = M$ ，取常数

$$I(p_\beta)dp_\beta = \frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}F(Z, T_\beta)(E_0 - T_\beta)^2p_\beta^2dp_\beta$$

定义常数

$$K = \sqrt{\frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}} = \frac{g|M_{if}|}{(2\pi^3\hbar^7c^3)^{1/2}}$$

因此 $\beta$ 衰变概率公式可以改写为

$$\left[ \frac{I(p_\beta)}{F(Z, T_\beta)p_\beta^2} \right]^{1/2} = K(E_0 - T_\beta)$$

上述推导结果描述了一则线性关系，在实测数据绘制的库里厄图中，在 $\beta$ 粒子高能区，线性关系符合得很好；而在低能区则偏离直线，这与源的自吸收和散射相关

- 对于禁戒跃迁， $M_{if} \neq M$ ，与 $p_\beta$ 和 $p_v$ 有关，居里描绘不再是直线。此时需要考虑“shape factor”，其表达式为

$$S(p_\beta, p_v) = p_\beta^2 + p_v^2$$

以 $\left[ \frac{I(p_\beta)}{F(Z, T_\beta)p_\beta^2 S(p_\beta, p_v)} \right]^{1/2}$ 作为曲线的因变量，则禁戒跃迁的线性关系符合得较好（虽然在低能区仍有偏移）

### 小结

$\beta$ 能谱的形状由上述公式决定，主要有三个影响因素

- 统计因子，即 $(E_0 - T_\beta)^2 p_\beta^2 dp_\beta$ 。它反映了末态密度数，电子动量取两个最值时，动量分布的两端呈现了两个抛物线的形状；此外，它受衰变能的影响很大，衰变能增大导致衰变常数随之五次方增大
- 库仑改正因子，即 $F(Z, T_\beta)$ 。库仑改正因子考虑了核库仑场对电子动能（量）的影响，修正了动能（量）谱
- 跃迁矩阵元（的影响），即 $|M_{if}|^2$ 。在允许跃迁时，轻子波函数近似为1，这导致该项不影响 $\beta$ 谱的形状。但是当出现禁戒跃迁时，电子的能量动量分布形状会由于“shape factor”的影响而发生改变

## 衰变常数和比较半衰期

- 上述的推导都止步于 $I(p_\beta)dp_\beta$ ，这描述的是单位时间内发射动量处于 $p_\beta \sim (p_\beta + dp_\beta)$ 的粒子的概率，因此对整个 $\beta$ 粒子的动量谱积分的结果即为单位时间内发射 $\beta$ 粒子的概率，即 $\beta$ 衰变的衰变常数

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \int_0^{p_{\beta \max}} I(p_\beta)dp_\beta \\ &= \int_0^{p_{\beta \max}} \frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}F(Z, T_\beta)(E_0 - T_\beta)^2p_\beta^2dp_\beta \end{aligned}$$

暂时忽略矩阵元 $M_{if}$ 与能量 $T_\beta$ 的关系，将它从积分中提出来，得到

$$\begin{aligned}
\lambda &\approx \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{\beta \max}} F(Z, T_\beta) (E_0 - T_\beta)^2 p_\beta^2 dp_\beta \\
&= \frac{m_e^5 c^4 g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} \int_0^{p_{\beta \max}} F(Z, T_\beta) \left(\frac{E_0 - T_\beta}{m_e c^2}\right)^2 \left(\frac{p_\beta}{m_e c}\right)^2 d\frac{p_\beta}{m_e c} \\
&= \frac{m_e^5 c^4 g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} f(Z, E_0)
\end{aligned}$$

定义  $f(Z, E_0)$  是费米积分，已知库仑改正因子和  $\beta$  粒子最大能量  $E_0$  时，通过数值积分可以求得费米积分。此外，当  $E_0 \gg m_e c^2$ ，并取  $F(Z, E_0) \approx 1$  时，费米积分与  $\beta$  粒子最大能量  $E_0$  的五次方正相关，即如下的萨金特定律

- 萨金特定律： $\beta$  衰变的衰变常数  $\lambda$  与  $\beta$  粒子的最大能量的五次方成正比。这说明  $\beta$  衰变的衰变能对衰变的半衰期影响很大，即使是同种类型的跃迁。仅凭半衰期长短不足以对  $\beta$  衰变的跃迁类型作出判断
- 为了消除衰变能对衰变常数的显著影响，考虑到半衰期与费米积分成反比，定义比较半衰期

$$fT_{1/2} = f(Z, E_0)T_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4 g^2 |M_{if}|^2}$$

- 在允许跃迁的前提下(即轻子组的轨道角动量为0，以至于它们的波函数可以忽略时)，当  $\beta$  衰变的母核子核的波函数相似时， $|M|^2 \sim 1$ ，跃迁矩阵元最大，比较半衰期最小，例如镜像核

## $\gamma$ 衰变

- $\gamma$  跃迁是指原子核通过电磁跃迁发射  $\gamma$  射线或内转换电子从激发态退激到较低能级的过程，也被称为  $\gamma$  衰变。大多数核反应的生成核可能是处于激发态的，处于激发态的原子核具有退激到低能级的需求，可能发生  $\gamma$  跃迁。此外，电磁跃迁并非唯一的退激方式，也可能发射  $\alpha, \beta, n, p$  等，甚至裂变

## $\gamma$ 衰变的一般性质

- $\gamma$  衰变基本特点
  - $N, Z$  均不变，仅有能级状态改变
  - 发射粒子能量的数量级范围是  $1\text{keV} \sim 10\text{MeV}$
  - 半衰期范围是  $10^{-17}\text{s} \sim 100\text{a}$
  - 包括  $\gamma$  跃迁和内转换两种形式

注意区分  $\gamma$  射线和 X 射线

- 二者的产生方式不同。 $\gamma$  是由于核内能级变化，正负电子湮灭产生；X 是由于核外能级变化，轫致辐射产生
- 能量范围不同。X 射线能量一般不会超过  $10\text{keV}$  数量级，但是如果是轫致辐射，则可以很高
- $\gamma$  光子特点
  - $\gamma$  光子的静止质量为零，动质量为  $m_\gamma = \frac{E_\gamma}{c^2} = \frac{hv}{c^2}$
  - $\gamma$  光子的动量  $P_\gamma = m_\gamma c = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda}$
  - $\gamma$  光子的波长  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} \approx \frac{1239.8(\text{MeV}\cdot\text{fm})}{h\nu(\text{MeV})}$
  - $\gamma$  光子不带电荷
  - $\gamma$  光子在物质中的穿透能力很强
  - $\gamma$  光子的内禀宇称为  $1\hbar$ ，是玻色子，纵向极化
- $\gamma$  衰变的衰变能定义为衰变前后能级能量之差，即

$$E_0 = E_i - E_f$$

$E_0$  转变为子核反冲动能和  $\gamma$  光子的能量

$$E_0 = T_R + E_\gamma$$

由于在 $\gamma$ 衰变中子核获得的反冲动能很小，因此 $\gamma$ 光子的动能与衰变能近似相等，即 $h\nu = E_\gamma \approx E_0 = E_i - E_f$ 。由动量守恒式可以推导得到，对应的反冲核动能可以表示为

$$T_R = \frac{1}{2}m_R v_R^2 = \frac{E_0^2}{2m_R c^2} = \left(\frac{E_0}{2m_R c^2}\right) E_0$$

### 小结

- 在 $\gamma$ 跃迁时，子核的反冲能通常很小，仅承担了衰变能的 $10^{-3} \sim 10^{-5}$ ，常用的探测器难以测量这种能量差别，可以近似认为 $\gamma$ 光子就是 $\gamma$ 衰变能的全部
- 一般情况下可以忽略子核的反冲能，但是在穆斯堡尔效应中不能忽略
- 在固体研究中，对于 $5 \sim 100 MeV$ 的 $\gamma$ 射线，其子核反冲能为 $100 eV$ 左右，足以驱使反冲核离开晶格中的位置，形成辐射损伤

## 穆斯堡尔效应\*

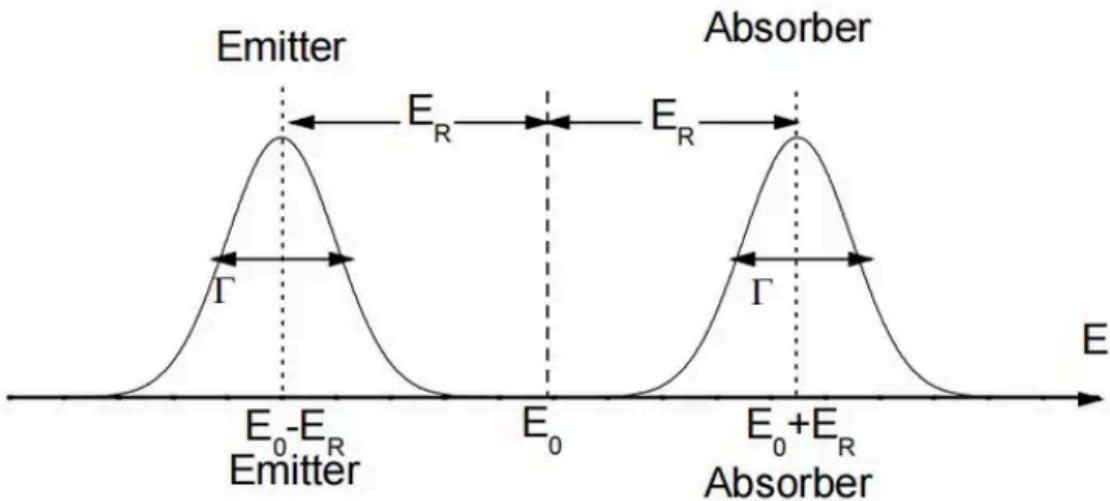
- 共振吸收是普遍的物理现象，例如两支频率相同的音叉的共振现象。对于核外电子而言，能量合适的光子可以促使电子发生轨道跃迁，得到原子光谱；对于核内核子而言，能量合适的 $\gamma$ 射线可以促使原子核达到激发态，这一共振吸收现象直到1953年才被发现。
- $\gamma$ 跃迁中，在考虑了原子核的反冲能 $T_R$ 后， $\gamma$ 跃迁发射的 $\gamma$ 射线能量 $E_{\gamma(e)}$ 为

$$E_{\gamma(e)} = E_0 - T_R = E_0 - \frac{E_0^2}{2m_R c^2}$$

因此 $\gamma$ 射线的能量会略小于激发能 $E_0$ ，类似的，要把原子核激发到 $E_0$ 的激发态时，所需的 $\gamma$ 射线能量应略大于激发能，即

$$E_{\gamma(a)} = E_0 + T_R = E_0 + \frac{E_0^2}{2m_R c^2}$$

根据不确定度关系，任何不稳定核素所处的能级都存在能级宽度，用 $\Gamma$ 表示。因此同一激发态的 $\gamma$ 射线的发射谱和吸收谱分别是以 $E_0 - T_R$ 和 $E_0 + T_R$ 为中心的连续分布，平均能量相差 $2T_R$ ，如下图所示



假如 $T_R$ 可以忽略，则发射谱与吸收谱完全重合，能够观察到显著的共振吸收现象，表现为放射性核素放出的光子数目的显著减少。而如果 $T_R$ 很大，则两个谱会完全分离，不存在共振吸收现象。容易发现， $\Gamma$ 和 $T_R$ 的相对大小影响着共振吸收的强度。例如研究 $^{57}Fe$ 的第一激发态与基态之间的激发能，发现 $\frac{\Gamma}{T_R} \sim 10^{-6}$ ，因此两个谱距离相差很远，不满足发生共振吸收的条件，表现为原子核的共振吸收现象难以通过实验观测得到

原子发光的共振吸收强度则相对大得多。例如钠原子D线的激发能，对应的 $\frac{\Gamma}{T_R} \sim 10^3$ ，说明发射谱和吸收谱几乎重合

- 为了增大原子核共振吸收的强度，考虑减小 $T_R$ 。穆斯堡尔在1958年发现，当放射性核素处于固体晶格中时，遭受反冲的就不再是单个原子，而可能是整块晶体。此时 $T_R$ 表达式中的 $m_R$ 将会是晶体的质量，因此 $T_R$ 趋近于零，整个过程可视为无反冲的过程，这

## 就是穆斯堡尔效应

- 实操中，为了尽可能实现真正的无反冲共振吸收，需要减小晶格振动的影响，一般会选取晶体坚实的、晶格振动不容易激发的、原子核 $\gamma$ 跃迁能量小于 $100\text{eV}$ 的、内转换系数较小的核素来进行实验，并适当降低晶体温度以改善效果
- 在穆斯堡尔的实验中，他将发射 $\gamma$ 射线的放射源置于一个转盘上，因此可以通过改变转盘转速来改变 $\gamma$ 射线的能量(多普勒效应)，与静止放射源的能量差为

$$\Delta E = \pm E_\gamma \frac{v}{c}$$

当放射源静止时，共振吸收最强，探测器探测到的 $\gamma$ 射线计数最低；当能量改变的数值超过能级的自然宽度时，探测器的计数率极具上升。以 $\gamma$ 射线的强度衰减百分比为纵轴，能量差 $\Delta E$ 为横轴，绘制得到的U形曲线被称为**穆斯堡尔谱**。穆斯堡尔谱仪由放射源、吸收体、探测器和驱动装置构成

- 综上，原子核共振吸收的强度受反冲能和 $\gamma$ 射线能量影响很大，穆斯堡尔效应使得我们可以消除反冲能对强度的影响，仅关注 $\gamma$ 射线的能量，因此可以高精度测量 $\gamma$ 射线的能量。以 $^{67}\text{Zn}$ 为例，其能量分辨本领可以达到 $10^{-16}$ 数量级

## $\gamma$ 辐射的多极性

- 电荷、电流的静态分布会导致原子核存在静电场和静磁场，可以分解为多极矩来描述，例如一般会认为对称体系的单极势存在而偶极势不存在。但是涉及到跃迁导致的电荷电流变化时，需要从电磁辐射的角度考虑多极势的影响
  - 电偶极子做简谐振动，会在垂直于运动方向产生辐射
  - 磁偶极子在xoy平面的交变电流相当于沿Z轴做简谐振动，产生磁偶极辐射

单极势存在，而单极辐射不存在(考察电荷外的区域时)。因为单极辐射的产生可以类比为表面布满一定量电荷的气球的大小变化，球外的电场分布不会改变，因此不产生辐射

- 在经典电磁辐射中， $\omega$ 可取任意值。而在量子力学中，原子核是微观的电荷、电流体系，其电磁辐射具有以下规律
  - 两个能级之间的跃迁产生 $\gamma$ 辐射，能量前后角是分立的

$$E_\gamma = h\nu = \hbar\omega = E_i - E_f$$

- 跃迁动量守恒。假设跃迁母子核的角动量矢量差为 $L = I_i - I_f$ ，则有
  - $L$ 一般取最小值，因为差值越大，跃迁几率越小
  - 若 $I_i = I_f = 0$ ，则不发射 $\gamma$ 光子，因为 $\gamma$ 光子具有一个内禀自旋，无法耦合出0的角动量
  - 若 $I_i = I_f \neq 0$ ，则光子的角动量可以取 $1 \sim I_i + I_f$
- 根据 $\gamma$ 光子带走的角动量 $L\hbar$ ，可以对电磁跃迁的极次进行划分。假设跃迁的级次为 $L$ ，则辐射的极次为 $2^L$ 极辐射。每一级对应电和磁两种极辐射方式

## 小结

- 对于某两个能级之间的跃迁来说， $\gamma$ 光子带走的能量是确定的，由能级差决定
- 但是 $\gamma$ 光子带走的角动量可能是不同的。在母子核自旋矢量差所允许的范围内，除了0以外， $\gamma$ 光子可以带走任意整数 $\hbar$ 的角动量
- $\gamma$ 光子带走的角动量 $L$ 决定了电或磁跃迁的极次 $2^L$ ，极次越高， $\gamma$ 跃迁难度越大
- $\gamma$ 光子总的发射概率是由各种被允许的不同角动量光子的概率之和决定的，但是一般只有第一项起主要作用
- 电磁相互作用中宇称守恒。对于同一角动量级数，两种多极辐射带走的宇称奇偶不同
  - 电多极辐射 $\pi_\gamma = (-1)^L$ ，用EL表示电 $2^L$ 极辐射
  - 磁多极辐射 $\pi_\gamma = (-1)^{(L+1)}$ ，用ML表示磁 $2^L$ 极辐射

## $\gamma$ 跃迁几率与选择定则

- Weisskopf单质子模型
  - 电跃迁的衰变常数

$$\begin{aligned}\lambda_E(L) &= \frac{2(L+1)}{\epsilon_0 L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{e^2 R^{2L}}{\hbar} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+1} \\ &= \frac{2(L+1)}{L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c} (Kr)^{2L} \omega\end{aligned}$$

- 磁跃迁的衰变常数

$$\lambda_M(L) = 10 \frac{2(L+1)}{L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c} (Kr)^{2L} \omega \left(\frac{\hbar}{m_p c R}\right)^2$$

## 讨论

- 由于  $kR \sim 5 \times 10^{-2} \ll 1$ , 因此衰变常数随光子带走的角动量增大而减小
- 相邻级次的跃迁几率

$$\frac{\lambda_E(L+1)}{\lambda_E(L)} \approx \frac{\lambda_M(L+1)}{\lambda_M(L)} \approx (kR)^2 \approx 2.5 \times 10^{-3}$$

- 相同级次的跃迁几率比

$$\frac{\lambda_M(L)}{\lambda_E(L)} = 10 \left(\frac{\hbar}{m_p c R}\right)^2 \approx 4 \times 10^{-3}$$

- 一般地,  $\lambda_M(L) \sim \lambda_E(L+1)$ 。这说明在母子核的角动量关系能够同时满足相邻级次的电磁跃迁的发生条件的前提下, 如果能够发生  $ML$ , 则一定也能否发生  $E(L+1)$ , 二者竞争的概率是同数量级的
- 根据电磁跃迁的宇称和角动量关系,  $\gamma$  跃迁的跃迁方式选择一般情况如下表(例如  $0+$  到  $0+$  无法发生  $\gamma$  跃迁)

$\Delta\pi(\downarrow)\Delta I(\rightarrow)$	<b>0/1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
+	M1(E2)	E2	M3(E4)	E4	M5(E6)
-	E1	M2(E3)	E3	M4(E5)	E5

根据  $\gamma$  跃迁性质和初(末)态  $I^\pi$  求解末(初)态  $I^\pi$  时, 注意给出的  $\gamma$  跃迁辐射方式, 如果只包含电辐射跃迁, 则说明潜在的低级次磁辐射跃迁是不允许的。例如初态  $2^+$ , 只有 E2 跃迁, 则说明光子无法得到 1 角动量, 最小得到 2 角动量, 且宇称为正, 因此末态为  $0^+$  或  $4^+$

## 同质异能跃迁

- 同质异能态的  $\gamma$  跃迁被称为同质异能跃迁
- 同质异能态较为稳定, 表现为跃迁几率低, 在  $\gamma$  跃迁方面, 表现为跃迁级次越高、能级能量越低的激发态核素, 更有可能是同质异能态
- 同质异能态的  $\gamma$  跃迁几率较小, 此时竞争过程中转换、 $\beta$  衰变、 $\alpha$  衰变较为突出
- 性质
  - 同质异能跃迁时,  $\Delta I \geq 3$ (这要求核素有较为复杂的壳层结构, 因此  $N(Z) < 40$  的轻核中无同质异能素)
  - 高激发态一般不会是同质异能态
  - 偶偶核的同质异能态很少
  - 奇A核的同质异能态最多
  - 同质异能态的内转换系数大

## 内转换电子

- 内转换指的是原子核将退激能量交给核外电子, 使电子从原子中电离的现象

## 注意

- 核非点粒子，核外电子的波函数可能进入核
- 原子核的电磁场与壳层电子相互作用，直接将核的激发能交给壳层电子，形成内转换
- 内转换过程不产生 $\gamma$ 光子
- 内转换过程借助场的超距作用完成，并不是内部的光电效应(即核释放光子来将电子电离)。证据有：内转换比光电效应的效率高；高级次跃迁对应高内转换系数； $0 \rightarrow 0$ 的跃迁不发射 $\gamma$ 光子，但是有内转换电子出现
- 内转换电子的动能

$$T_e = E_i - E_f - \epsilon_{K,L,M,\dots}$$

注意这里的核外电子动能是针对子核的核外能级而言的

- 定义内转换的衰变能为跃迁能级差，即

$$E_0 = E_i - E_f \Rightarrow T_e = E_0 - \epsilon$$

注意核外电子势能由内向外逐层增大，K层电子势能最低，电离需要的能量最大。当 $E_0 > \epsilon_K$ 时，内转换主要发生在K壳层上；当 $\epsilon_K > E_0 > \epsilon_L$ 时，内转换主要发生在L壳层上...

- 由于内转换伴随着核外电子的电离，与EC轨道电子俘获类似，低层轨道电子的电离会留出空位，高层电子向内跃迁会放出光子，导致**内转换过程常常伴随着特征X射线或俄歇电子发射**
- 原子核退激时，内转换效应与发射 $\gamma$ 光子是竞争过程。定义**内转换系数**

$$\alpha = \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma} = \frac{n_e}{n_\gamma}$$

依此定义，核激发态总的跃迁几率为

$$\lambda = \lambda_e + \lambda_\gamma = \lambda_\gamma(1 + \alpha)$$

也可以对原子各核外壳层分别定义内转换系数，例如

$$\alpha_K = \frac{n_K}{n_\gamma}, \alpha_L = \frac{n_L}{n_\gamma}, \dots$$

总的内转换系数为

$$\alpha = \sum_{i=K,L,M,\dots} \alpha_i$$

- 内转换系数与质子数Z,衰变能 $E_0$ ,光子角动量L,  $\gamma$ 跃迁辐射方式 $E/M$ 以及电子壳层有关
  - 当 $Z, E_0$ 确定时，L越大， $\alpha$ 越大。因为L增大时 $\gamma$ 跃迁概率降低
  - 当 $Z, L$ 确定时， $E_0$ 越大， $\alpha$ 越小。因为衰变能越大 $\gamma$ 跃迁概率越大
  - 当 $E_0, L$ 确定时，Z越大， $\alpha$ 越大。因为重核更容易发生内转换
  - 同级次L下，磁辐射(M跃迁)对应的内转换系数更大
  - 电子壳层越靠内，内转换系数越大，K最大
- 当 $\epsilon_K \ll E_e \ll m_0 c^2$ 时，可以近似得到

$$\frac{\alpha_K(EL)}{\alpha_K(ML)} \approx \frac{2m_0 c^2}{E_\gamma} < 1$$

且此时内转换系数随衰变能增大而迅速降低；随跃迁级次的升高而迅速增大；随 $Z^3$ 线性增大；外部壳层电子的内转换系数 $\alpha$ 随着 $1/n^3$ ( $n > 1$ )的规律下降

## 小结

- 发射内转换电子和发射 $\gamma$ 光子是互为竞争的过程，原子核衰变时只能选择一种方式来进行
- 内转换过程是针对某一个电磁跃迁过程而言的，即是针对某两个能级之间的跃迁，而非从某一个能级的跃迁
- 内转换系数是一个无量纲数，是衰变时内转换部分的衰变常数与 $\gamma$ 跃迁部分衰变常数的比值

- $\lambda_\gamma(1 + \alpha)$ 才是两个能级之间跃迁过程所对应的衰变常数

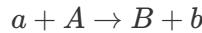
## 补充

- 在绘制衰变纲图时， $\alpha$ 衰变的箭头向左下； $\beta^+$ 和 $EC$ 向左下； $\beta^-$ 向右下；母核的能态线和 $\alpha$ 衰变的箭头线需要略粗

# CH4 原子核反应

## 概述

- 核衰变与核反应的区别
  - 原子核衰变是不稳定核素在没有外界影响的情况下**自发地**发生核蜕变的过程；核反应是由具有一定能量的粒子轰击靶核，使其组成或能量状态发生变化，成为不稳定核素，并放出粒子的过程，是**被诱发**的过程
  - 核衰变研究核内核子之间的相互作用，建立了衰变纲图，形成了衰变核谱学；核反应研究粒子与核、核与核之间的相互作用，入射粒子多样
  - 核衰变仅限于几个MeV的低激发能级；核反应涉及的能量可以很高
- 对于如下的核反应



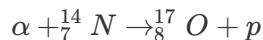
其中a是入射粒子，A是靶核，B是余核，b是出射粒子。用如下的记号来标识该反应

$$A(a, b)B$$

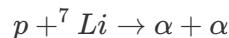
如果有多个出射粒子，则标识为

$$A(a, b_1 b_2 b_3 \dots)B$$

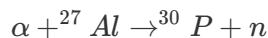
- 出入射粒子组合可以用来标识一类反应，例如 $(n, \gamma)$ 可以对应多种核反应
- 几个著名的核反应
  - 1919年，历史上第一个人工核反应(Rutherford)



- 1932年，第一个在加速器上实现的核反应(John Cockcroft & Ernest Walton)

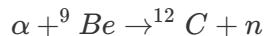


- 1934年，产生第一个人工放射性核素的反应(couple Joliot-Curie)



其中 ${}^{30} P$ 可以通过 $\beta^+$ 衰变到 ${}^{30} Si$

- 1932年，发现中子(Chadwick)



## 核反应分类

- 核散射：出射粒子和入射粒子是同种粒子， $a = b$ 。可分为两类
  - 弹性散射

$$A(a, a)A$$

反应前后系统总的动能相等，且原子核的内能不变

- 非弹性散射

$$A(a, a')A^*$$

反应前后系统总的动能改变，且原子核的内能改变

- 核转变：出射粒子与入射粒子不同， $a \neq b$

$$A(a, b)B$$

- 若出射粒子有 $\gamma$ ，则叫做辐射俘获
- 若入射粒子为 $\gamma$ ，则叫做光核反应、核光电效应
- 根据入射粒子分类
  - 中子核反应：入射粒子是中子的核反应( $n, *$ )
  - 带电粒子核反应：入射粒子是带电粒子的核反应( $p|d|\alpha| \dots, *$ )
  - 光核反应：入射粒子是 $\gamma$ 光子的核反应( $\gamma, *$ )
- 根据核子平均动能分类
  - 低能核反应： $E/A < 30\text{MeV}$
  - 中能核反应： $30\text{MeV} < E/A < 1000\text{MeV}$
  - 高能核反应： $E/A > 1000\text{MeV}$

## 反应道

- 反应道由入射道、出射道和反应道三个元素组成
  - 入射道是发生反应的核素组合，即 $A, a$ ，是唯一的
  - 出射道是反应产物的核素组合，即 $B, b_1, b_2, \dots$ ，有多种可能
  - 入射道和任意一种出射道相连，称为一个反应道
- 各反应道的发生几率是不同的。这与核反应机制和核结构有关，随入射粒子能量而变化；受守恒条件约束

## 核反应中的守恒定律

- 电荷守恒
- 核子数守恒
- 能量守恒
- 动量守恒
- 角动量守恒
- 宇称守恒

## 核反应能和Q方程

### 反应能

- 对核反应 $A(a, b)B$ ，反应前后体系总能量守恒。定义核反应过程释放出的能量称为反应能Q

$$\begin{aligned} Q &= (T_b + T_B) - (T_a + T_A) \\ &= (m_a + m_A)c^2 - (m_b + m_B)c^2 \\ &\approx (\Delta_a + \Delta_A) - (\Delta_b + \Delta_B) \\ &= (B_b + B_B) - (B_a + B_A) \end{aligned}$$

- 如果 $Q > 0$ ，则是放能反应
- 如果 $Q < 0$ ，则是吸能反应
- 吸能反应不可自发发生， $\alpha$ 粒子必须携带初始动能

### Q方程

- 假设靶核静止， $T_a = 0$ (因为靶核的热运动动能仅为 $10\text{meV}$ 数量级，远小于反应能)。则有Q方程

$$Q = T_B + T_b - T_a$$

$T_B$ 难以测量，因此考虑用其它参数来表示它。设b的出射角为 $\theta$ ，在非相对论条件下，由动量的三角余弦关系，整理得到

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{m_B}\right)T_b - \left(1 - \frac{m_a}{m_B}\right)T_a - \frac{2\sqrt{m_a m_b T_a T_b}}{m_B} \cos \theta$$

用核质量数A近似代替核质量m，可以得到出射粒子b的能量-角度关系

$$T_b = \left\{ \frac{\sqrt{A_a A_b T_a}}{A_B + A_b} \cos \theta \pm \left[ \left( \frac{A_B - A_a}{A_B + A_b} + \frac{A_a A_b}{(A_B + A_b)^2} \cos^2 \theta \right) T_a + \frac{A_B}{A_B + A_b} Q \right]^{1/2} \right\}^2$$

## 实验Q值

- 在上述Q方程中，可以人为控制入射核素a的动能 $T_a$ ，并在特定的角度 $\theta$ 测量动能，进而可以测量Q。注意Q也是变量，因为当余核B处于激发态时，反应能Q也会发生相应的改变
- 若剩余核所处激发态的能量为 $E^*$ ，则核的静止能量为

$$m_B^* = m_B + \frac{E^*}{c^2}$$

此时反应能为

$$Q' = Q - E^*$$

因此可以通过测量不同的 $Q'$ ，推得余核的能级结构

## 坐标系转换

- 由于核反应中，只有a和A的相对动能构成内能项参与核反应，同时认为靶核A是静止的，因此相对运动动能为

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_a m_A}{m_a + m_A} v_a^2 = \frac{m_A}{m_a + m_A} T_a$$

- 吸能反应发生条件为提供的内能项大于Q的绝对值，即

$$T' \geq |Q| \Rightarrow T_a \geq \frac{m_a + m_A}{m_A} |Q|$$

定义核反应阈值 $T_{th}$ 是在实验室系中能够引起核反应的入射粒子最低能量，则

$$T_a \geq T_{th} = \frac{m_a + m_A}{m_A} |Q| \approx \frac{A_a + A_A}{A_A} |Q|$$

## 小结

- 阈值仅在吸能反应( $Q < 0$ )中存在，这类反应需要吸能 $|Q|$ 才能发生， $|Q|$ 即为内能增加量
- 由于质心系要带走动能，因此实验室系的阈值必然大于质心系的阈值
- 阈值是相对于入射粒子a在实验室系下所需动能大小的限制
- 放能反应无阈值，但是对带电粒子反应需要考虑库仑势垒的作用

## 出射角转换

- 出射粒子在L系和C系中速度的关系满足

$$\vec{v}_b = \vec{v}_b' + \vec{v}_c$$

其中 $\vec{v}_b'$ 是质心系中粒子的速度矢量。定义

$$\gamma = \frac{v_c}{v'_b}$$

在速度矢量三角形中，定义 $v_c$ 与 $v_b$ 的夹角为 $\theta_L$ ，即粒子在实验室系下的偏射角度；定义 $v_c$ 与 $v'_b$ 的夹角为 $\theta_c$ ，即粒子在质心系下的偏射角度。根据上面的 $\gamma$ 定义及正余弦定理，有

$$\theta_c = \theta_L + \sin^{-1}(\gamma \sin \theta_L)$$

$$\cos \theta_L = \frac{\gamma + \cos \theta_c}{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta_c)^{1/2}}$$

根据质心系中反应能的表达式及总动量为零的限制，有

$$\gamma = \left( \frac{A_a A_b}{A_A A_B} \frac{T'}{T' + Q} \right)^{1/2}$$

- 上面的结果说明， $\gamma$ 可以用来描述质心系和实验室系中出射粒子散射角度的关系，且它可以用反应中的能量变化来刻画。下面分类讨论

- 弹性散射：

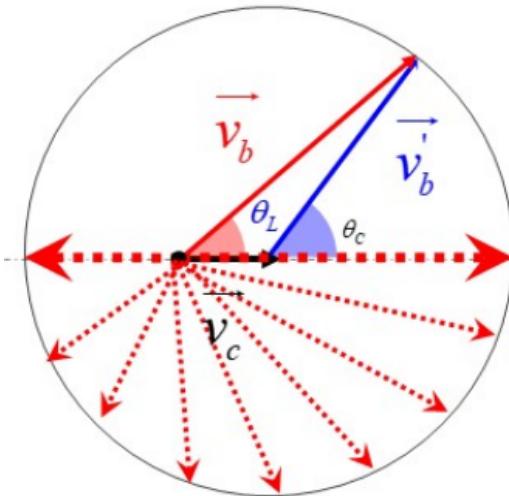
$$\begin{cases} Q = 0 \\ a = b \Rightarrow \gamma = \frac{A_a}{A_A} \\ A = B \end{cases}$$

这说明 $\gamma$ 与入射粒子能量无关，考虑前述的角度关系 $\theta_c = \theta_L + \sin^{-1}(\gamma \sin \theta_L)$ ，有两种特殊情况

- 当 $A_A \gg A_a$ 时， $\gamma \approx 0$ ，有 $\theta_c = \theta_L$
- 当 $A_A = A_a$ 时， $\gamma = 1$ ，有 $\theta_c = 2\theta_L$ 。这说明 $\theta_L$ 的取值范围被限定在 $[0, \frac{\pi}{2}]$

- 一般情况

- 若 $\gamma < 1$ ，则 $v_c < v'_b$ ，在矢量图上， $v_b$ 向量仍被限制在以 $v_c$ 向量终点( $v'_b$ 向量起点)为圆心， $v'_b$ 模长为半径的圆内极限情况与弹性散射类似



- 若 $\gamma > 1$ ，则 $v_c > v'_b$ ，在矢量图上， $v_b$ 的起点在圆外，散射角度被限制在与圆形成的两切线之间，出现圆锥效应

$$\theta_{L,max} = \sin^{-1}\left(\frac{v'_b}{v_c}\right)$$

出现该效应的条件为

$$\gamma = \frac{v_c}{v'_b} = \left( \frac{A_a A_b}{A_A A_B} \frac{T'}{T' + Q} \right)^{1/2} > 1$$

- 对于放能反应， $Q > 0$ ，仅当 $A_a A_b > A_A A_B$ 时，才可能出现 $\gamma > 1$
- 对于吸能反应， $Q < 0$ ，当入射粒子能量稍微超过阈值时才可能发生，概率较小

# 核反应截面和产额

## 核反应截面

- 守恒定律和能量条件用于判定一个核反应能否发生，而反应截面可以用来判定核反应发生的概率
- 对一个由靶核构成的薄层面，假设厚度为 $x$ ，单位面积靶核数为 $N_s(1/cm^2)$ ，用强度为 $I(1/s)$ 的入射粒子均匀地照射在薄靶上，则单位时间入射粒子与靶核发生反应数( $1/s$ )为

$$N' = \sigma I N_s$$

其中 $\sigma$ 是核反应截面，单位为barn，是面积量纲，大小满足

$$1b = 10^{-24} cm^2$$

- 截面

$$\sigma = \frac{N'}{IN_s}$$

它的物理意义是：一个入射粒子与单位面积上的一个靶核发生反应的概率

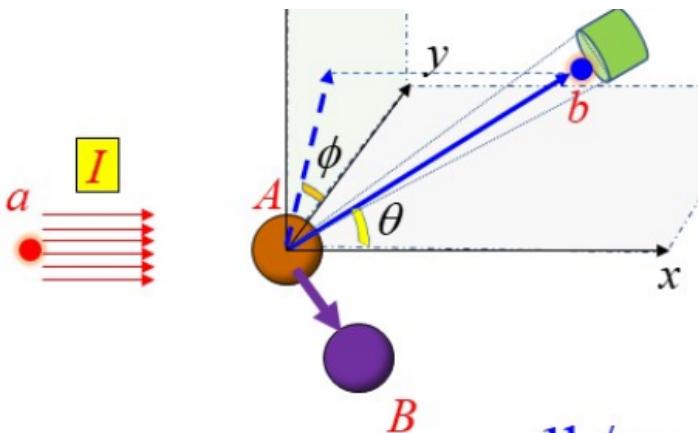
- 不同反应道有各自的截面 $\sigma_i = \sigma_i(a, b)$ ，称为分截面；分截面之和，称为总截面 $\sigma = \sum_i \sigma_i$
- 激发函数是截面随入射粒子能量的变化关系
- 激发曲线是由激发函数绘制的曲线

## 微分截面与角分布

- 核反应产物的出射可能是各向异性的，因此考虑单位角分布的微分截面。设单位时间， $\theta \rightarrow \theta + d\theta, \phi \rightarrow \phi + d\phi$ 出射粒子数 $dN'$ ，则

$$dN' = \sigma(\theta, \phi) IN_s d\Omega$$

其中 $\sigma(\theta, \phi)$ 即为微分截面，单位是 $1b/sr$ (靶恩每立体角)。注意图中球坐标系的方向定义， $\phi$ 所处的面是垂直于入射粒子运动方向的



- 微分截面

$$\sigma(\theta, \phi) = \frac{dN'}{IN_s d\Omega}$$

它的物理意义是：一个入射粒子与单位面积上的一个靶核发生反应，并将子核 $b$ 散射到 $(\theta, \phi)$ 方向单位立体角的概率

- 总截面

$$\sigma = \frac{N'}{IN_s} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

由于微分截面一般是对 $\phi$ 各向同性的，因此

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta$$

## 反应截面的坐标系变换关系

- 出射粒子数 $dN'$ 不随坐标系选择而改变，在L系和C系中，有

$$\sigma_L(\theta_L) d\Omega_L = \sigma_c(\theta_c) d\Omega_c$$

使用前述通过余弦定理得到的 $\theta_L = f(\gamma, \theta_c)$ ，可以得到两系中微分截面的关系

$$\sigma_L(\theta_L) = \frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta_c)^{3/2}}{1 + \gamma \cos \theta_c} \sigma_c(\theta_c)$$

## 核反应产额

- 定义入射粒子在靶中引起的核反应数 $N'$ 与入射粒子数 $I_0$ 之比，称为核反应产额Y

$$Y = \frac{N'}{I_0}$$

- 假设靶核厚度为D，厚度方向单位长度内的靶核数量为N，则 $I_x$ 数量的入射粒子在经过dx对应的夹层厚度时发生反应的数量为

$$-dI_x = \sigma I_x N dx$$

考虑 $I_0$ 粒子垂直靶核平面入射，则上式的解为

$$I_x = I_0 e^{-\sigma N x}$$

通过厚度为D的靶后，反应产额可以写作

$$Y = \frac{N'}{I_0} = \frac{I_0 - I_D}{I_0} = 1 - e^{-\sigma N D}$$

- 定义 $\lambda = \frac{1}{\sigma N}$ 为平均自由程，则反应产额与靶核厚度和平均自由程的大小关系密切相关

$$\begin{cases} D \ll \lambda = \frac{1}{\sigma N} \Rightarrow Y = \sigma N D, \text{薄靶} \\ D \gg \lambda = \frac{1}{\sigma N} \Rightarrow Y = 1, \text{厚靶} \end{cases}$$

定义透射率T

$$T = \frac{I_D}{I_0} = e^{-\sigma N D} \Rightarrow \sigma = -\frac{1}{ND} \ln T$$

可以通过透射率测量总截面

- 上述推导中没有考虑入射粒子在靶核不同深浅处的反应截面变化，这可由入射带电粒子能量降低导致，将反应截面视为能量的函数 $\sigma(E)$ ，则

$$Y = \frac{N'}{I_0} = \frac{\int_0^D I_x N \sigma(E) dx}{I_0}$$

- 对于薄靶，忽略入射粒子的能量损失和强度变化，结果为

$$Y = N \sigma(E_0) D$$

- 对于厚靶，入射粒子全部留在靶中。若截面较小，则大部分粒子不发生反应，而仅仅是由于能量过低而停留，此时不考虑入射粒子的强度变化，有

$$Y = N \int_0^{R(E_0)} \sigma(E) dx = N \int_0^{E_0} \frac{\sigma(E)}{-\left(\frac{dE}{dx}\right)} dE$$

### 小结

- 即使核子数为100的原子核的几何截面大小约为 $100 fm^2 = 1 barn$ ，但是实际核反应的截面可能大于或小于该值
- 决定总截面大小的因素有三个：入射核素组合 $a, A$ 和入射粒子动能 $T_a$
- 考虑单个入射道可以对应不同的出射道，各反应道的分截面和微分截面都是相互独立的

## 核反应中的分波分析

### 半经典的分波分析

- 入射粒子的轨道角动量有不同的组成，根据不同的轨道角动量来分析反应截面
- 在质心系中，可以写出入射道的相对运动动量，进而得到质心系中的约化德布罗意波长

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\mu v_a}$$

则相对运动的角动量可以写作

$$L = p \cdot \rho = \frac{\rho}{\lambda} \hbar$$

由于轨道角动量是量子化的，即 $L = l\hbar$ , ( $l = 0, 1, 2, \dots$ )，因此

$$\rho = l\lambda = 0\lambda, 1\lambda, 2\lambda, \dots$$

因此( $a, A$ )的碰撞过程可以视为不同轨道角动量的部分在距离A中心不同半径的地方发生，各自占据一个圆环对应的截面面积，但圆环内径最远不超过两核素的半径之和，即

$$\rho = l\lambda \leq R = R_a + R_A$$

轨道角动量 $l\hbar$ 的粒子发生反应的截面满足

$$\sigma_{r,l} \leq S_l = \pi(\rho_{l+1}^2 - \rho_l^2) = (2l + 1)\pi\lambda^2$$

$$\sigma = \sum_{l=0}^{R/\lambda} (2l + 1)\pi\lambda^2 = \pi(R + \lambda)^2$$

截面大于两核的几何截面的部分是由于波动性导致的(即最外面一圈圆环的外径大于几何截面半径)

入射粒子的动能越大，核素的几何大小对截面的影响效果越显著；动能越小，核素的波动性对截面的影响效果越显著

### 量子力学的分波分析

- 向x方向入射的粒子束可以用平面波表示，在有心力场中可以用球面波分解表示

$$\psi_i = e^{ikx} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)i^l \cdot j_l(kr) \cdot P_l(\cos \theta)$$

若原点上有靶核，则散射会导致出射波函数的变化，即

$$\psi = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) [1 \times e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - \eta_l \times e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}] P_l(\cos \theta)$$

其中  $\eta_l$  是以一个与  $l$  有关的复数，称为出射波系数，仅在原点处有靶核时不为 1，它和  $\eta$  都会影响出射波的振幅和相位

- 发生散射时， $|\eta_l| = 1$
- 发生反应时， $|\eta_l| < 1$

此处提及的  $\eta_l$  的模大小可以导出下文中散射截面与反应截面的取值范围

- 定义靶核导致的散射波函数是原点处有无靶核时出射波的差值，即

$$\begin{aligned}\psi_{sc} &= \psi - \psi_i \\ &= \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} i(2l+1)(1 - \eta_l) e^{ikr} P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{sc,l}\end{aligned}$$

- 量子力学给出，粒子流注量率(单位时间单位面积流过的粒子数，单位为  $((cm^2 \cdot s)^{-1})$ ) )的表达式为

$$j = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \psi)$$

定义散射截面  $d\sigma_{sc}(cm^2)$  是散射粒子数  $(s^{-1})$  与入射粒子注量率  $((cm^2 \cdot s)^{-1})$  的商，即

$$d\sigma_{sc} = \frac{j_{scattered} \cdot r^2 d\Omega}{j_{incident}}$$

计算可得

$$\frac{d\sigma_{sc}}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{4} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i(1 - \eta_l) P_l(\cos \theta) \right|^2$$

上述的单位立体角下的微分截面对全方位积分得到总截面

$$\begin{aligned}\sigma_{sc} &= \frac{\pi \lambda^2}{2} \int_0^\pi \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i(1 - \eta_l) P_l(\cos \theta) \right|^2 \sin \theta d\theta \\ &= \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \eta_l|^2\end{aligned}$$

可以类似推导得到反应截面的表达式

$$\sigma_r = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

## 低能中子的弹性散射截面

- 以低能中子为例计算散射截面。对低能入射粒子仅考虑  $l = 0$  的项，核外波函数化简为

$$\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$$

在核外波函数写作

$$u_o(r) = \frac{i}{2k} (e^{-ikr} - \eta_0 e^{ikr})$$

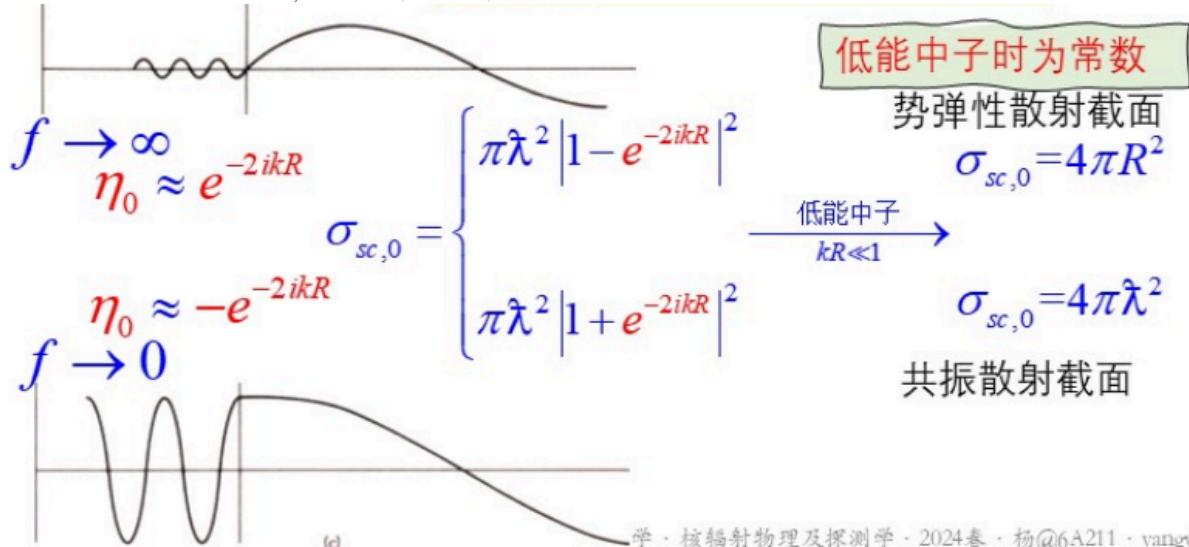
核内波函数为  $u_i(r)$ ，在粒子边界处，由于势阱有限，因此有波函数一阶连续的边界条件，即

$$\begin{cases} u_i(R) = u_o(R) \\ u'_i(R) = u'_o(R) \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{u_i} \frac{du_i}{dr}|_{r=R} = f = \frac{r}{u_o} \frac{du_o}{dr}|_{r=R}$$

因此内外波函数在核边界处的对数导数应相同。如果入射粒子与核的作用已知，则核内波函数可知，继而可知核边界处的对数导数。根据核外波函数的形式可以导出

$$\eta_0 = \frac{f + ikR}{f - ikR} e^{-2ikR}$$

进而可以求得散射截面  $\sigma_{sc,0} = \pi\lambda^2 |1 - \eta_0|^2$ ，具体有两种分类，如下图所示



学·核辐射物理及探测学·2024春·杨@6A211·yangyi

- 上面给出了边界处对数导数分别取两极限值时两种散射类型的散射截面，实际上可以将  $\sigma_{sc,0}$  更直观地展开为两种散射截面的叠加

$$\begin{aligned} \sigma_{sc,0} &= \pi\lambda^2 |(e^{2ikR} - 1) + \frac{-2ikR}{f_R + i(f_I - kR)}|^2 \\ &= \pi\lambda^2 |A_{pot} + A_{res}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{pot,0} &= \pi\lambda^2 |A_{pot}|^2 \\ &= \pi\lambda^2 |2ie^{ikR} \sin kR|^2 \\ &\approx 4\pi\lambda^2 (kR)^2 \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

其中  $\approx$  来源于  $kR \ll 1$  的近似。结果表明当入射粒子能量不大时，势弹性散射的截面是个常数，与核的大小有关。两种散射截面的数量级差异较大，如下

$$\begin{cases} \sigma_{pot,0} \sim 10^{-22} s \\ \sigma_{res,0} \sim 10^{-16} s \end{cases}$$

虽然共振散射较大，但一般只在入射粒子为高能状态时出现

- 由于发生散射时  $\eta$  模为 1，发生反应时模小于一。根据散射截面和反应截面的表达式，两种截面的取值范围如下图所示

## 散射截面

$$\sigma_{sc,l} = \pi \lambda^2 (2l+1) |1 - \eta_l|^2$$

$$\pi \lambda^2 (2l+1) \times (0 \sim 4)$$

对任意的轨道角动量  $l$

## 反应截面

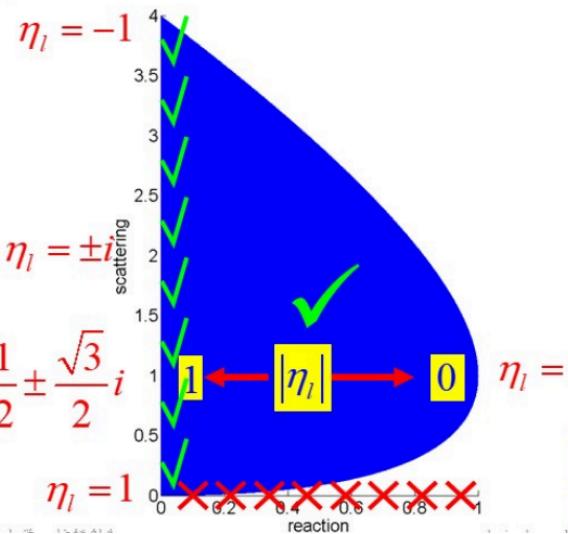
$$\sigma_{r,l} = \pi \lambda^2 (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

$$\pi \lambda^2 (2l+1) \times (0 \sim 1)$$

取值范围

$$\frac{\sigma_{sc,l}}{\pi \lambda^2 (2l+1)} = |1 - \eta_l|^2$$

$$\eta_l = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$



$$\frac{\sigma_{r,l}}{\pi \lambda^2 (2l+1)} = (1 - |\eta_l|^2)$$

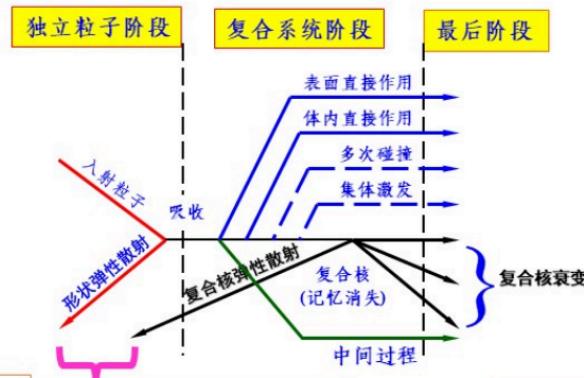
- 允许有纯的散射过程，即  $|\eta_l| = 1$ ；但不允许纯的反应过程
- 入射道对出射道总是开放的，出射粒子可以沿入射道返回，一定存在弹性散射
- 弹性散射道之外的其它反应道不一定开放，受守恒定律限制

## 核反应机制及核反应模型

### 核反应的三阶段描述

- 第一阶段是独立粒子阶段。指的是入射粒子是独立运动的，光学模型可以很好地解释这一阶段(将靶核视为半透明玻璃球，则会有透射、反射和衍射波的干涉和区分)。入射粒子的行为主要有两种：
  - 部分入射粒子被吸收，引起核反应
  - 部分入射粒子被散射，形成弹性散射，分为势弹性散射或形状弹性散射两种
- 第二阶段是复合系统阶段。此阶段入射粒子不再是独立的，粒子与靶核形成复合体系，二者之间有三种交换能量的方式：
  - 直接作用(反应后a仍飞出)，作用时间  $10^{-20} \sim 10^{-22}$ 
    - 表面、体内直接作用：与若干个核子作用，交换能量
    - 多次碰撞
    - 集体激发，引起转动、振动
  - 中间过程：介于直接作用和复合核之间，达到平衡前发射粒子
  - 形成复合核，作用时间  $10^{-15} s$ ：入射粒子损失能量后停留在核内，形成复合核

核反应中直接作用与复合核过程可能同时存在，二者的反应机制不同。直接作用的出射粒子部分保留入射粒子的信息，出射粒子角类似散射分布；复合核的出射粒子“失忆”，出射粒子角各向同性
- 第三阶段即最后阶段，复合系统分解为出射粒子和剩余核，如下图所示



### 复合核弹性散射:

- 出射粒子与入射粒子相同
- 剩余核处于基态

### 都是弹性散射

### 复合核非弹性散射:

- 出射粒子与入射粒子相同
- 剩余核处于激发态

- 各种截面的关系如下图

### 小结：各种截面间的关系

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \sigma_{pot} + \sigma_a \\ \sigma_a &= \sigma_{CN} + \sigma_D \\ \sigma_{sc} &= \sigma_{pot} + \sigma_{res} \\ \sigma_t &= \sigma_{sc} + \sigma_r \\ \sigma_a &= \sigma_{res} + \sigma_r\end{aligned}$$

t: Total

pot: Potential scattering

a: Absorption

CN: Compound nucleus

D: Direct reaction

res: Resonant scattering

sc: Scattering

r: Reaction

注意，上图中的截面关系只是逻辑上的，它们之间的关系是复数和与复数差的关系，存在干涉。例如上文推导散射截面时有

$$\begin{cases} \sigma_{sc,0} \propto |A_{pot} + A_{res}|^2 \\ \sigma_{pot,0} \propto |A_{pot}|^2 \\ \sigma_{res,0} \propto |A_{res}|^2 \end{cases}$$

课内没有理论表明各个  $A_i$  是正交的，之后在复合核模型处也会提及复数干涉这一点

## 复合核模型

### 复合核

- 复合核模型将核反应分成相互独立的两个阶段
  - 入射粒子射入靶核，与之形成一个处于激发态的复合核
  - 激发态的复合核可沿入射道(即弹性散射)衰变，也可能开放其它衰变道
- 复合核模型的两个阶段及特征如下图



(1). 复合核的形成

复合核形成截面

$$\sigma_{CN}(T_a)$$

(2). 复合核的衰变

b出射道衰变几率

$$W_b(E^*)$$

- 复合核处于激发态，有退激的需求，由于激发能要公摊到每个核子上，因此复合核衰变得较慢( $10^{-14} \sim 10^{-18}s$ )。复合核的激发能定义为入射粒子体系的质心系中的相对动能与激发核 $C^*$ 的结合能之和，即

$$E^* = \frac{m_A}{m_a + m_A} T_a + B_{aA}$$

复合核发射核子一般需要8MeV的分离能，但以A=100的原子核为例， $E^* \approx 20\text{ MeV}$ ，平均每个核子只获得0.2MeV。经过多次碰撞后，复合核也可以发生衰变，将核子从复合核中发射出来，称为**粒子蒸发**

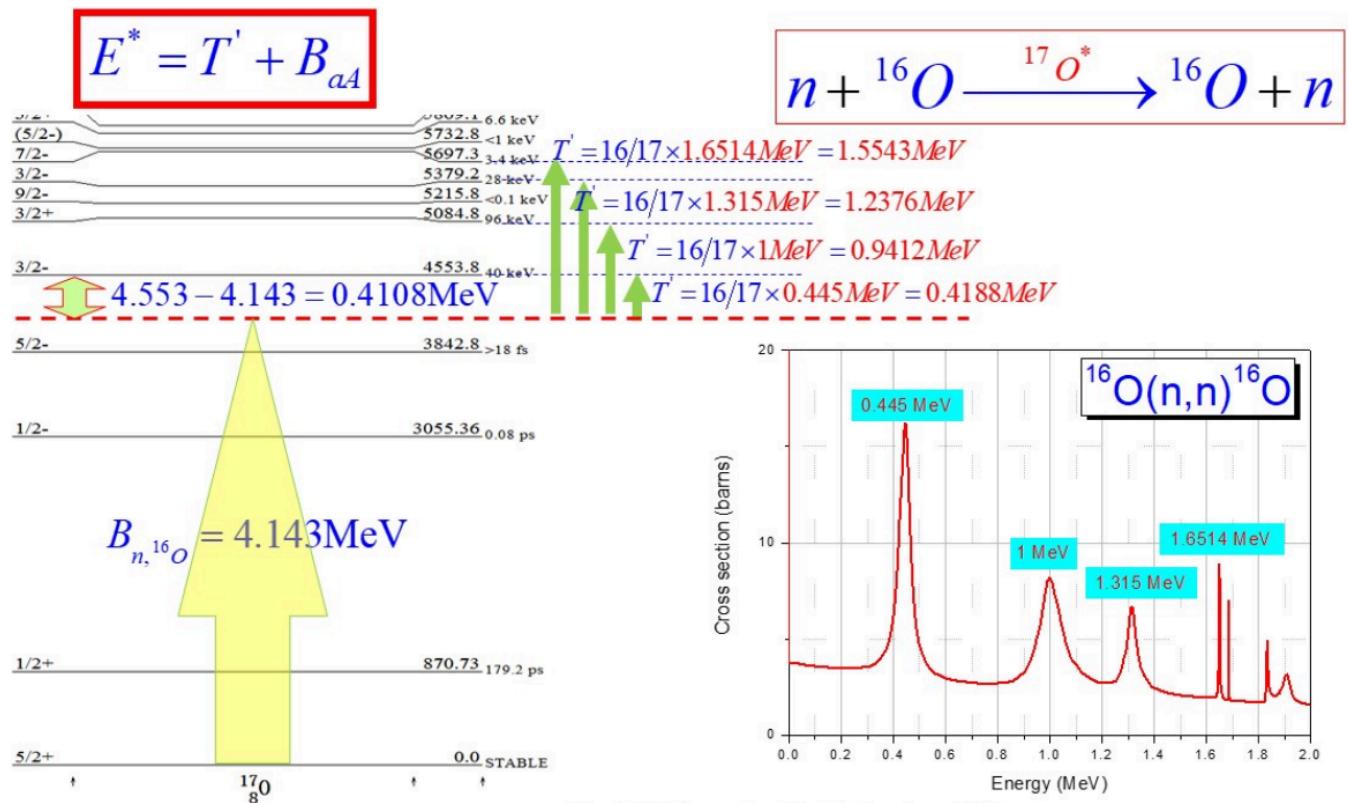
- 复合核反应的两个阶段是独立的，前后无关，不同反应道的截面共享同一个形成截面，相互之间的比值等价于出射道的衰变几率的比值

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + A_1 \\ a_2 + A_2 \\ a_3 + A_3 \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow C^* \rightarrow \left. \begin{array}{l} B_1 + b_1 \\ B_2 + b_2 \\ B_3 + b_3 \\ \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{a_i b_j} = \sigma_{CN}(T_{a_i}) W_{b_j}(E^*) \\ \frac{\sigma_{a_i b_m}}{\sigma_{a_i b_n}} = \frac{W_{b_m}(E^*)}{W_{b_n}(E^*)} = \frac{\sigma_{a_k b_m}}{\sigma_{a_k b_n}} \end{array} \right.$$

小结

- 复合核如何衰变只取决于系统现在的能量状态，而与它如何形成无关
- 复合核的衰变由一定的统计规律决定
- 复合核衰变的衰变能不小，但分摊到每个核子身上会比较小。真正衰变发生在多次碰撞之后，所需时间会在 $10^{-15}s$ 量级，相对于核反应而言较慢
- 入射粒子的能量不太高，处于 $10 \sim 20\text{ MeV}$
- 靶核A较大，是中等质量或重核
- 带电粒子也许更容易形成复合核

## 共振现象



- 上图展示了沿着弹性散射道发生核反应时的共振现象。由于结合能项距离激发态的某一确切能级仍有一段距离，这一段距离需要用入射粒子的动能来弥补，因此随着入射粒子动能的变化，核反应强度会出现几个峰值。其中入射动能从小到大对应的第一个峰称为第一共振，对应图中 ${}^{17}O$ 的第四激发态
- 理论上，仍然以慢中子为例，仅考虑l=0即S波，当入射中子的能量达到某些值时， $\delta_0(T') = \frac{\pi}{2}$ ，散射截面达到极大，出现共振。通过泰勒展开可以求得散射截面表达式

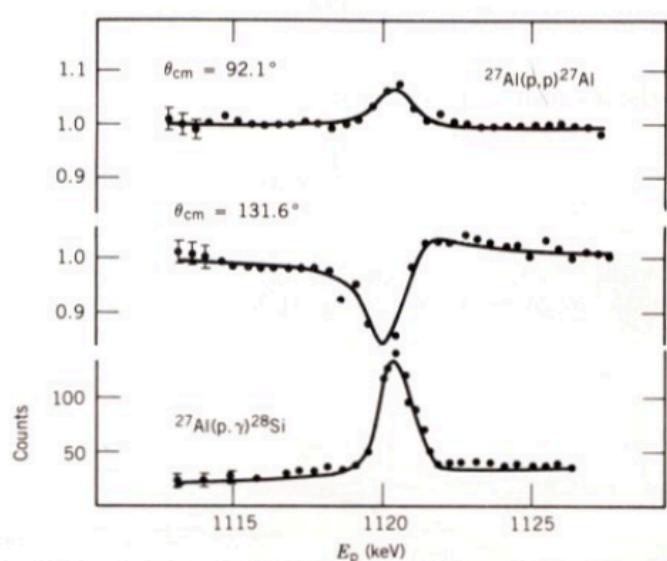
$$\sigma_{sc,0} = 4\pi\lambda^2 \sin^2 \delta_0(T') = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma^2}{(T' - E_R)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

下图考虑了势弹性散射和共振弹性散射的干涉，得到了更为精确的图样

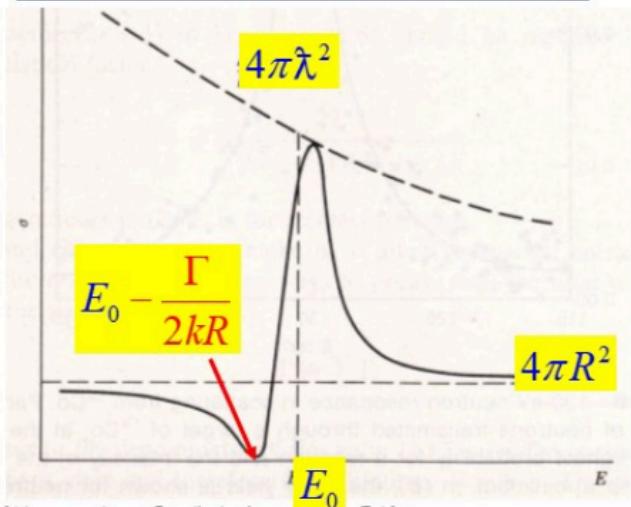
$$\sigma_{sc,0} = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_a}{[(T' - E_0)^2 + \Gamma^2 / 4]}$$

$$\sigma_{sc,0} = \pi \lambda^2 \left| (e^{2ikR} - 1) + \frac{i\Gamma_a}{(T' - E_0) + i\Gamma/2} \right|^2$$

$kR \ll 1$  若只考慮散射  
 $\Gamma = \Gamma_a$



$$\sigma_{sc,0} \approx 4\pi \lambda^2 \left| ikR + \frac{i\Gamma}{2(T' - E_0) + i\Gamma} \right|^2$$



清华大学·核辐射物理及探测学·2024春·杨@6A211·yangyigang@mail.tsinghua.edu.cn·P.127

- Breit-Wigner公式(单能级共振公式)

$$\sigma_{ab} = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(T' - E_0)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}$$

◦ 当 $T' = E_0$ 时，发生共振， $\Gamma$ 即为半波宽

◦ 改写B-W公式

$$\sigma_{ab} = [\pi \lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma}{(T' - E_0)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}] \times \frac{\Gamma_b}{\Gamma} = \sigma_{CN}(T_a) \frac{\Gamma_b}{\Gamma}$$

- 处于激发能 $E^*$ 的复合核单位时间发生衰变的总几率为(衰变常数)

$$\lambda = \sum_i \lambda_i$$

由于能级宽度 $\Gamma = \hbar\lambda$ ，因此总的衰变能级宽度

$$\Gamma = \hbar\lambda = \sum_i \Gamma_i$$

且对于特定反应道，其反应截面

$$\sigma_{ab} = \sigma_{CN}(T_a) W_b(E^*) = \sigma_{CN}(T_a) \frac{\Gamma_b}{\Gamma}$$

### 慢中子反应的 $1/v$ 规律

- 中子形成复合核的特点
  - 中子进入靶核后会迅速损失动能，并使复合核处于激发态

- 中子被吸收成为复合核的概率与复合核激发能距离某个能级的远近有关，距离越近概率越大
- 慢中子进入靶核的概率不大，复合核再把中子发射出去(弹性散射)的概率也不大
- 与中子直接横穿靶核的时间相比，复合核的寿命很长
- 对于慢中子与一个A>100的靶核而言，最常见的复合核退激机制是发射 $\gamma$ 射线，( $n, \gamma$ )反应是一个比较慢的过程，截面遵循 $1/v$ 规律
- $1/v$ 规律
  - 波长与动能相关： $\lambda^2 \propto \frac{1}{v^2}$
  - 低能中子不易进入势阱，概率与速度相关： $\Gamma_n \propto v$
  - 慢中子的动能对衰变行为的影响有限： $E^* = Const, \Gamma_\gamma = Const$
  - 对于非共振中子，能量的变化对复合核的衰变几乎没有影响：截面表达式的分母各项均为常数
  - 最终得到

$$\sigma_{n,\gamma} \propto \frac{1}{v}$$

即 **$1/v$ 规律**：当我们用慢中子来照射靶核时，中子能量的降低将会有助于( $n, \gamma$ )反应的发生，该反应的截面反比于中子的速度

## 小结

- 对于低能中子而言， $1/v$ 规律主要来自于，它与靶核的吸收截面是由两个因素决定的
  - 它的约化波长：速度降低为0.5倍，波长增大为2倍，面积增大为4倍
  - 它进入靶核的概率：中子进入靶核的概率正比于中子的速度
- 综合得到，当中子的速度降低一倍(是病句罢)时，其靶核吸收的截面将会增大一倍
- 该情况下形成的靶核由于中子结合能的缘故，会处于某个激发态。由于中子带来的相对运动动能太小了，实际上激发能基本不受中子实际动能的影响
- 由于靶核的激发能基本恒定，因此它后续的出射阶段的概率分布等特性也是确定的，例如发射 $\gamma$ 射线时( $n, \gamma$ )反应的截面也表现为 $1/v$ 规律
- 如果出射粒子是带电粒子c，当其要穿透的库仑势垒不高不厚(例如轻核)，则( $n, c$ )反应也会表现出 $1/v$ 规律。这一点对于慢中子的探测是很有价值的
- 这里的讨论是基于“中子能量远离共振能量”这个前提下开展的，如果中子的动能碰巧在共振能量附近，则分母中的差值平方项会起作用，使得截面偏离 $1/v$ 规律

## 连续区理论

- 连续区指的是随着T'增加，复合核处于高激发态，发生能级重叠的现象。由于能级宽度 $\Gamma = \hbar\lambda$ ，高能级越来越宽，发生重叠
- 黑核模型：靶核强烈吸收入射粒子，直接反应截面可以忽略

## 黑核模型：靶核强烈吸收入射粒子，直接反应截面可以忽略。

黑核模型的中子吸收截面

出射道数很大，入射道衰变几率可以忽略。

$$\sigma_a = \sigma_{CN} = \sigma_r$$

$$\sigma_a = \sigma_{CN} = \pi(R + \lambda)^2 \frac{4Kk}{(K + k)^2}$$

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(T' + V_0)} \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu T'}$$

1. 中子能量很低， $k \ll K, \lambda \gg R$

$$\sigma_a(n) = \frac{4\pi}{Kk} \propto \frac{1}{v}$$

2. 中子能量很高， $k \rightarrow K, \lambda \ll R$

$$\sigma_a(n) = \pi R^2$$

黑核模型的带电粒子吸收截面：

$$\sigma_a \approx \pi(R + \lambda)^2 \left[ 1 - \frac{V(R + \lambda)}{T'} \right]$$

清华大学·核辐射物理及探测学·2024春·杨@6A211·yangyigang@mail.tsinghua.edu.cn·P.141

## 直接反应

- 入射粒子把大部分能量传递给靶核中一个或几个核子，使这些核子从核内发射出来
  - 表面直接反应：入射粒子与靶核表面结合得较松的核子发生相互作用
  - 体内直接反应：入射粒子与靶核深处的核子发生相互作用
  - 直接反应包括削裂反应、拾取反应、敲出反应、电荷交换反应、集体激发
    - 削裂反应：入射粒子打到靶核上，入射粒子中的一个或几个核子被靶核俘获
    - 拾取反应：入射粒子从靶核中拾取一个或几个核子
    - 敲出反应：入射粒子把部分能量直接交给靶核中的一个或几个核子，使它们飞出靶核
- 常见粒子静质量

particle	still mass $m_0(MeV/c^2)$	lifetime
electron	0.511	stable
proton	938.272	stable
neutron	939.565	885.67 s

- 常用计算数值
  - $1u = 1.66053886 \times 10^{-27} kg = 931.5 MeV/c^2$
  - $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 fm \cdot MeV$