

辐射防护及保健物理

司书屹 2022011090

2025 年 3 月 13 日

第三次作业

1. 混合物活度相同时间计算

放射性核素的活度随时间衰减遵循指数定律：

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

其中 $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ ， $T_{1/2}$ 为半衰期。

设 ^{24}Na 的初始活度为 $A_{0,^{24}\text{Na}}$ ， ^{32}P 的初始活度为 $A_{0,^{32}\text{P}}$ ，且 $A_{0,^{24}\text{Na}} : A_{0,^{32}\text{P}} = 98 : 2 = 49 : 1$ 。当活度相等时：

$$A_{0,^{24}\text{Na}} e^{-\lambda_{24\text{Na}} t} = A_{0,^{32}\text{P}} e^{-\lambda_{32\text{P}} t}$$

$$49 e^{-\lambda_{24\text{Na}} t} = e^{-\lambda_{32\text{P}} t}$$

取自然对数：

$$-\ln 49 = (\lambda_{32\text{P}} - \lambda_{24\text{Na}}) t$$

^{24}Na 的半衰期 $T_{1/2,^{24}\text{Na}} \approx 14.96 \text{ h}$ ， ^{32}P 的半衰期 $T_{1/2,^{32}\text{P}} \approx 14.28 \text{ d} \approx 342.72 \text{ h}$ ：

$$\lambda_{24\text{Na}} = \frac{\ln 2}{14.96} \approx 0.0463 \text{ h}^{-1}$$

$$\lambda_{32\text{P}} = \frac{\ln 2}{342.72} \approx 0.00202 \text{ h}^{-1}$$

$\ln 49 \approx 3.8918$ ，代入：

$$-3.8918 = (0.00202 - 0.0463) t$$

$$t = \frac{3.8918}{0.04428} \approx 87.9 \text{ h} \approx 3.66 \text{ d}$$

约 3.66 天后， ^{24}Na 和 ^{32}P 的活度相同。

2. 最大产出淋洗时间计算

^{99}Mo 衰变成 ^{99m}Tc ，淋洗后 ^{99m}Tc 的初始活度为零，其活度随时间积累。 ^{99}Mo 的活度衰减为：

$$A_{^{99}\text{Mo}}(t) = A_{^{99}\text{Mo},0} e^{-\lambda_{^{99}\text{Mo}} t}$$

^{99m}Tc 的活度积累为：

$$A_{^{99m}\text{Tc}}(t) = A_{^{99}\text{Mo},0} \frac{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}}{\lambda_{^{99m}\text{Tc}} - \lambda_{^{99}\text{Mo}}} (e^{-\lambda_{^{99}\text{Mo}} t} - e^{-\lambda_{^{99m}\text{Tc}} t})$$

题目要求 $A_{^{99m}\text{Tc}} = 0.98 A_{^{99}\text{Mo}}$ ：

$$A_{^{99}\text{Mo},0} \frac{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}}{\lambda_{^{99m}\text{Tc}} - \lambda_{^{99}\text{Mo}}} (e^{-\lambda_{^{99}\text{Mo}} t} - e^{-\lambda_{^{99m}\text{Tc}} t}) = 0.98 \cdot A_{^{99}\text{Mo},0} e^{-\lambda_{^{99}\text{Mo}} t}$$

两边除以 $A_{^{99}\text{Mo},0}$ ：

$$\frac{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}}{\lambda_{^{99m}\text{Tc}} - \lambda_{^{99}\text{Mo}}} (e^{-\lambda_{^{99}\text{Mo}} t} - e^{-\lambda_{^{99m}\text{Tc}} t}) = 0.98 e^{-\lambda_{^{99}\text{Mo}} t}$$

$$\frac{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}}{\lambda_{^{99m}\text{Tc}} - \lambda_{^{99}\text{Mo}}} (1 - e^{(\lambda_{^{99}\text{Mo}} - \lambda_{^{99m}\text{Tc}})t}) = 0.98$$

令 $\Delta\lambda = \lambda_{^{99m}\text{Tc}} - \lambda_{^{99}\text{Mo}}$ ：

$$\frac{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}}{\Delta\lambda} (1 - e^{-\Delta\lambda t}) = 0.98$$

$$1 - e^{-\Delta\lambda t} = 0.98 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}}$$

$$e^{-\Delta\lambda t} = 1 - 0.98 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}}$$

取自然对数：

$$-\Delta\lambda t = \ln \left(1 - 0.98 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}} \right)$$

$$t = -\frac{1}{\Delta\lambda} \ln \left(1 - 0.98 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}} \right)$$

^{99}Mo 的半衰期 $T_{1/2, ^{99}\text{Mo}} \approx 66.02 \text{ h}$ ， ^{99m}Tc 的半衰期 $T_{1/2, ^{99m}\text{Tc}} \approx 6.02 \text{ h}$ ：

$$\lambda_{^{99}\text{Mo}} = \frac{\ln 2}{66.02} \approx 0.0105 \text{ h}^{-1}$$

$$\lambda_{^{99m}\text{Tc}} = \frac{\ln 2}{6.02} \approx 0.115 \text{ h}^{-1}$$

$$\Delta\lambda = 0.115 - 0.0105 = 0.1045 \text{ h}^{-1}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{^{99m}\text{Tc}}} = \frac{0.1045}{0.115} \approx 0.9087$$

$$0.98 \cdot 0.9087 \approx 0.8905$$

$$e^{-\Delta\lambda t} = 1 - 0.8905 = 0.1095$$

$$\ln 0.1095 \approx -2.21$$

$$t = \frac{2.21}{0.1045} \approx 21.15 \text{ h}$$

约 21.15 小时后， ^{99m}Tc 的活度达到 ^{99}Mo 活度的 98%。